NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

Autor(en): **Daniëls, M.-Fr.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1917)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17325

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

PAR

M.-Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

Nous développons dans cette note quelques théorèmes bien simples, échappés à ce qu'il paraît à l'attention des géomètres qui se sont occupés de la géométrie du triangle et du tétraèdre.

1. — *Lorsque aux droites sphériques ou grands cercles* p_i $(i = 1, 2, 3)$ *qui relient un point quelconque* $P(\mathfrak{r}_0)$ *de la surface sphérique aux sommets* $A_i(\mathfrak{r}_i)$ *d'un triangle sphérique on élève en* P *même des normales* q_i, *ces nouvelles droites sphériques coupent les côtés correspondants du triangle en trois points* Q_i *qui sont collinéaires.*

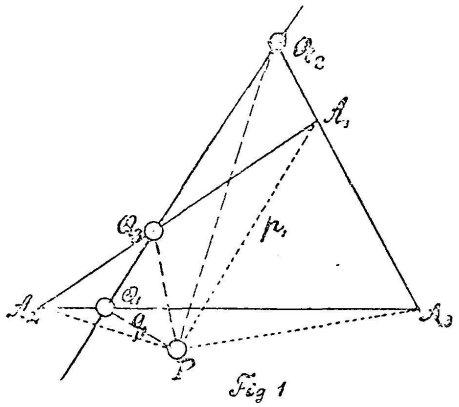

Fig 1

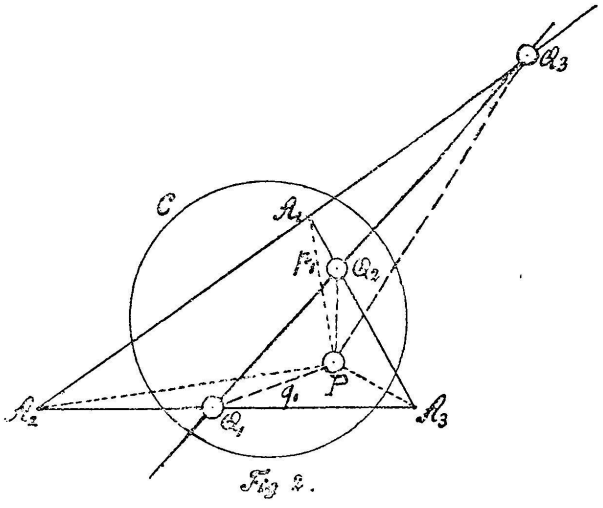

Fig 2.

On peut remplacer la surface sphérique par un plan (fig. 1), et les normales q_i par des droites conjuguées aux p_i par rapport à une conique C sphérique ou plane (fig. 2).

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'identité vectorielle :

$$V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0$$

où, pour plus de simplicité, les virgules remplacent encore des V, signes de la multiplication vectorielle ou externe. En effet, nous trouvons, si les P_i sont les vecteurs des côtés du triangle, successivement pour le premier sommet A_1, pour la droite p_1, pour la normale q_1 passant par P, et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté les vecteurs suivants[1] :

$$A_1 \equiv V\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 \ , \quad p_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 \ , \quad q_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3$$
$$Q_1 \equiv V\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 \ .$$

Ce dernier point[2] donnant avec les deux autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices une somme qui est identiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires, c. q. f. d.

2. — *Lorsque aux droites* p_i *qui relient un point quelconque de l'espace* P *aux sommets* A_i *d'un triangle plan, on construit au point* P *même des plans normaux* π_i, *ces nouveaux plans coupent les côtés correspondants du triangle en trois points* Q_i *qui sont collinéaires.*

On peut remplacer les plans normaux π_i par des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Pour démontrer ce théorème on peut se servir avec avantage des méthodes de Grassmann. En effet, on a successivement pour la droite p_1, pour la droite conjuguée p'_1, pour le plan π_1 passant par cette dernière droite et le point P, enfin pour l'intersection Q_1 de ce plan avec le premier côté du triangle

$$p_1 \equiv [A_1P] \ , \quad p'_1 \equiv | \, [A_1P] \ , \quad \pi_1 \equiv [P \ \ | \, A_1P]$$
$$Q_1 \equiv [A_2A_3 \ \ P \ | \, A_1P] = (A_3P \mid A_1P)A_2 - (A_2P \mid A_1P)A_3 \ .$$

Or ce dernier point, donnant avec les deux autres, qu'on en déduit par permutation cyclique une somme qui est iden-

---

[1] Voir *l'Enseignement Mathématique,* VII, n° 3 : *Les coordonnées projectives sur la sphère* ou *Essai de géométrie sphérique,* Fribourg 1907.

[2] En développant on trouve

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}_3)\mathfrak{f}_2 - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}_2)\mathfrak{f}_3 \ ; \quad V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}_3) \ V\mathfrak{r}\mathfrak{f}_2 - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}_2)V\mathfrak{r}\mathfrak{f}_3$$
$$V\mathfrak{f}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 = [(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}_3)(\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_2) - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}_2)(\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_3)]\mathfrak{r} + (\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{r})(\mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{r}_3 - (\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{r})(\mathfrak{f}_3\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{r}_2 \ .$$

tiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires. C. q. f. d.

On arrive à une autre démonstration de ce théorème, dont le premier constitue, au moins pour le plan, un cas spécial, en prenant le point P comme centre d'une sphère et en considérant avec le triangle sphérique produit par les droites PA_i le trialatère polaire produit par les plans π_i. Nous nous proposons de revenir dans une note ultérieure sur certains théorèmes similaires, où le point est remplacé par une droite quelconque ou un plan quelconque.

3. — *Lorsqu'aux droites* p_i *qui relient un point quelconque* P *aux sommets* $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ *d'un tétraèdre, on construit au point* P *même les plans normaux* π_i, *ces nouveaux plans coupent les faces correspondantes du tétraèdre selon quatre droites* q_i, *génératrices d'un hyperboloïde.*

Au lieu des plans normaux π_i on peut prendre des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Ici encore les méthodes de Grassmann fournissent une démonstration bien simple. On trouve, en effet, successivement pour la droite p_1, pour la droite conjuguée p'_1, pour le plan π_1 et pour son intersection q_1 avec la première face du tétraèdre :

$$p_1 \equiv [A_1 P] \ , \quad p'_1 \equiv | \, [A_1 P] \ , \quad \pi_1 \equiv [P \mid A_1 P]$$

$$q_1 \equiv [A_2 A_3 A_4 \ P \ \mid A_1 P] \ .$$

Or cette droite et les trois autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&(A_1 P \mid A_2 P)[A_3 A_4] + (A_1 P \mid A_3 P)[A_4 A_2] + (A_1 P \mid A_4 P)[A_2 A_3] \\
&- (A_2 P \mid A_3 P)[A_4 A_1] - (A_2 P \mid A_4 P)[A_1 A_3] - (A_2 P \mid A_1 P)[A_3 A_4] \\
&(A_3 P \mid A_4 P)[A_1 A_2] + (A_3 P \mid A_1 P)[A_2 A_4] + (A_3 P \mid A_2 P)[A_4 A_1] \\
&- (A_4 P \mid A_1 P)[A_2 A_3] - (A_4 P \mid A_2 P)[A_3 A_1] - (A_4 P \mid A_3 P)[A_1 A_2] \ .
\end{aligned}$$

Leur somme est nulle ; les quatre droites sont donc des génératrices d'un hyperboloïde.

Fribourg, le 30 septembre 1917.