Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1918)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE
Autor: de la Vallée Poussin, C.
Kapitel: 2. — Les deux théorèmes d'existence de Weierstrass.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18019

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

fonction continue ; *la représentation trigonométrique,* auquel cas la fonction est supposée continue et périodique de période 2π, la représentation s'étend alors à toutes les valeurs réelles de x.

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n, c'est-à-dire par une suite limitée de la forme

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx ,$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynôme de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. Il y a lieu d'observer que si l'expression est paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynôme de degré n en $\cos x$.

Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et $P_n(x)$ un polynôme de degré n d'ailleurs quelconque. Ce polynôme doit être considéré comme une expression approchée de $f(x)$. Le maximum dans (a, b) de la différence absolue

$$|f(x) - P_n|$$

est *l'approximation* fournie par P_n. Ce polynôme est d'autant meilleur comme expression approchée qu'il fournit une approximation plus petite. Si l'on considérait une fonction périodique et sa représentation trigonométrique, l'approximation se définirait de la même manière.

Le *problème de l'approximation* consiste à former une expression de l'un ou de l'autre de ces deux types *dont l'approximation soit aussi petite qu'on le veut.* Le problème est possible dans les deux cas. Il y a là deux *théorèmes d'existence,* tous deux dus à Weierstrass (1885), et qui ont été le point de départ de la théorie qui nous occupe. Il y a lieu de nous y arrêter quelques instants.

2. — Les deux théorèmes d'existence de Weierstrass.

Weierstrass a démontré les deux théorèmes suivants (1) :

I. *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b) *peut*

être développée en série uniformément convergente de polynômes dans cet intervalle.

II. *Toute fonction continue de période* 2π *peut être développée en série uniformément convergente d'expressions trigonométriques finies.*

Il est à peine besoin de faire observer que le problème du développement en série est le même que celui de l'approximation indéfinie. Par exemple, si l'on a un développement en série uniformément convergente de polynômes

$$f(x) = P_1 + P_2 + \dots P_n + \dots ,$$

on en déduit un polynôme aussi approché qu'on le veut en sommant un nombre suffisant de termes de la série. Réciproquement, si l'on sait former un polynôme P_n aussi approché qu'on le veut, le développement en série s'obtient par la formule

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots$$

Les théorèmes I et II se ramènent réciproquement l'un à l'autre. J'y insisterai dans le paragraphe suivant. Mais, depuis Weierstrass, on les a prouvés directement l'un et l'autre de bien des manières. Je vais signaler quelques-unes de ces démonstrations et faire quelques observations d'un ordre général.

La plus simple peut-être des démonstrations du théorème II est celle de M. Volterra (2) : On peut approcher autant qu'on veut d'une courbe continue à l'aide d'une ligne polygonale. Une telle ligne représente une fonction qui, n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima, peut, d'après Dirichlet, être développée en série de Fourier uniformément convergente. On sommera un nombre suffisant de termes de cette série et l'on obtiendra l'approximation demandée.

Les autres démonstrations du théorème II se rattachent, comme celle-ci, à la série de Fourier. Elles utilisent l'un ou l'autre des divers procédés de sommation de cette série qui assurent la convergence, soit le procédé de sommation de Poisson comme celle que M. Picard a donnée dans son Traité

d'Analyse, soit le procédé de la moyenne arithmétique, ce qui est préférable, car ce procédé, qui est celui de M. Fèjer, donne, du premier coup, une somme trigonométrique finie. Enfin j'ai indiqué moi-même (3) en 1908 un troisième procédé qui présente le même avantage que celui-ci.

Passons au théorème I. Weierstrass le démontre par la considération de l'intégrale

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_a^b f(t)\, e^{-n(t-x)^2}\, dt ,$$

qui, pour n assez grand, s'approche autant qu'on veut de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Mais il vaut mieux, comme M. Landau l'a fait le premier (4), définir directement un polynôme approché par la formule

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t)\, [1 - (t - x)^2]^n\, dt ,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1 - t^2)^n\, dt .$$

Nous reviendrons plus loin sur ce polynôme P_n, que nous appellerons *polynôme de Landau*.

Ces démonstrations font appel au calcul intégral et ont une allure synthétique. On doit à M. Lebesgue une démonstration, qui ne va pas au delà du théorème de Weierstrass, mais qui est très instructive par son caractère strictement analytique. Elle réduit le problème à ses éléments irréductibles, ce qui permet de le résoudre avec un minimum de moyens. Elle a été publiée (5) en 1898, dans une courte Note, la première qui ait été écrite par l'illustre mathématicien français. Dans cette Note, intéressante à plusieurs titres, M. Lebesgue ramène la démonstration du théorème I pour une fonction continue quelconque, à la démonstration dudit théorème pour la seule fonction particulière $|x|$.

M. Lebesgue emprunte d'abord à M. Volterra la réduction

de l'approximation d'une fonction continue quelconque à celle d'une ligne polygonale. Voici maintenant comment il ramène l'approximation d'une telle ligne à celle de $|x|$.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n) les sommets de la ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses x_1 et x_n. Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

est nulle pour $x \leqq x_k$ et égale à $2(x - x_k)$ pour $x \geqq x_k$.

Posons

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$$

où a_0, a_1, ... a_{n-1} sont n constantes à déterminer. Cette fonction varie linéairement entre deux abscisses consécutives x_k et x_{k+1}. Donc, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit d'amener la coïncidence des sommets. Faisons $x = x_i$, nous obtenons ainsi la condition

$$y_i = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k) .$$

Ceci constitue, pour $i = 1, 2, \ldots n$, un système récurrent, qui détermine de proche en proche a_0, a_1, ... a_{n-1}. Ainsi l'approximation de l'ordonnée $F(x)$ de la ligne polygonale est ramenée à celle de $\varphi_k(x)$ ou de $|x - x_k|$ et, en définitive, à celle de $|x|$.

3. — Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre.

Les deux modes d'approximation se ramènent l'un à l'autre, l'approximation par polynômes à une approximation trigonométrique et, inversement, l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes.

Les deux problèmes ont été résolus dès le début, mais le problème direct, qui a pour objet de déduire l'approximation par polynômes d'une approximation trigonométrique, est le