Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1920-1921)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA THÉORIE DES VECTEURS ESSAI DE CALCUL SYMBOLIQUE .

Autor: Rousseau, Th.

Kapitel: première espèce de multiplication.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515713

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. Egalité. — Deux systèmes de vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ sont dits *égaux*, s'ils ont même résultante générale et même moment résultant en un point O : ils ont alors même moment résultant en tout point de l'espace. J'écrirai

$$\vec{S} = \vec{S}' .$$

Un *couple* est formé de deux vecteurs parallèles et de sens contraires ayant même grandeur. Deux couples sont *égaux*, s'ils ont même axe $\vec{G}$. Je représenterai par la notation [G] un couple ayant pour axe le vecteur $\vec{G}$.

3. Addition. — Je désignerai par la notation $\vec{S} + \vec{S}'$ le système formé par les vecteurs du système $\vec{S}$ et ceux du système $\vec{S}'$. Si le système $\vec{S}$ est formé de n vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ..., $\vec{V}_n$, j'écrirai, conformément à cette définition,

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n .$$

Il est évident que si, dans une somme, on remplace un terme par un terme égal (§ 2), on obtient une somme égale à la primitive.

La définition est *commutative* et *associative* [1].

Une première espèce de multiplication.

4. Définition. — J'appelle *produit de première espèce de deux vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et je représente par la notation

$$\vec{U} \cdot \vec{V} ,$$

le nombre algébrique, dont la valeur absolue mesure six fois le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs ; le signe est +, si les deux vecteurs ont le sens direct l'un par rapport à l'autre ; le signe est — dans le cas contraire.

J'appelle *produit de première espèce de deux systèmes de vecteurs* $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ et je représente par

$$\vec{S} \cdot \vec{S}'$$

[1] Il est évident que cette définition n'a rien de commun avec celle de la somme géométrique.

la somme algébrique des produits de première espèce de chacun des vecteurs $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ de $\vec{S}$ par chacun des vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_p$ de $\vec{S}'$ [1] :

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \vec{U}_i \cdot \vec{V}_j \,.$$

PROPRIÉTÉS.

5. *Dans un produit de première espèce, on peut remplacer l'un des facteurs par un système égal.* En effet, le transport d'un vecteur $\vec{U}$ du système $\vec{S}$ en $\vec{U}'$ le long de son support ne modifie évidemment pas la mesure du tétraèdre construit sur ce vecteur et sur l'un quelconque $\vec{V}$ du système $\vec{S}'$. D'autre part, si l'on remplace deux vecteurs $\overrightarrow{AU}_1$, $\overrightarrow{AU}_2$ du système S, ayant la même origine A, par leur somme géométrique $\overrightarrow{AU}$, les trois tétraèdres construits sur l'un quelconque $\overrightarrow{BV}$ des vecteurs de $\vec{S}'$ et sur chacun des vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, $\vec{U}$ ont même base ABV, la hauteur du troisième est la somme algébrique des deux autres, d'où

$$\overrightarrow{AU}_1 \cdot \vec{V} + \overrightarrow{AU}_2 \cdot \vec{V} = \overrightarrow{AU} \cdot \vec{V} \,.$$

Ces opérations élémentaires ne modifiant pas la valeur du produit $\vec{S}\cdot\vec{S}'$, la proposition est établie.

6. Le produit de première espèce est évidemment *commutatif :*

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \vec{S}'\cdot\vec{S} \,.$$

7. Le produit de première espèce est *distributif par rapport à l'addition* (§ 2) :

$$\vec{S}\cdot(\vec{S}' + \vec{S}'') = \vec{S}\cdot\vec{S}' + \vec{S}\cdot\vec{S}'' \,.$$

(Le signe + du second membre est évidemment celui de l'addition algébrique.)

On voit donc que les règles de calcul de ces produits de première espèce sont celles des produits algébriques de deux facteurs.

---

[1] Ce produit de première espèce s'appelle généralement *moment relatif* des deux systèmes. Il est commode de le considérer comme un produit.

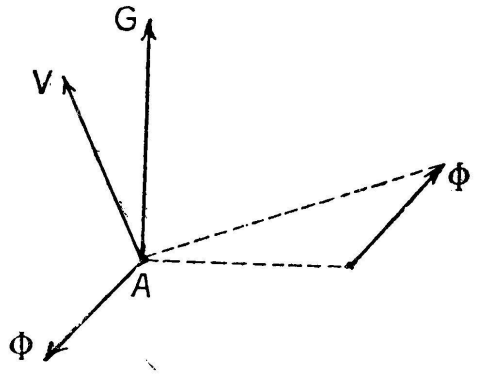
APPLICATIONS.

8. *Le produit de deux vecteurs de même origine est nul.*

9. Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont respectivement pour symétriques par rapport à un point ou à un plan deux vecteurs $\vec{U}'$ et $\vec{V}'$, on a

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = -\vec{U}'\cdot\vec{V}' .$$

10. *Le produit de deux couples est nul,* car on peut donner à ces deux couples le même centre de symétrie ; la propriété résulte alors du § 9.



11. *Le produit d'un vecteur* $\overrightarrow{AV}$ *et d'un couple d'axe* $\vec{G}$ *est égal au produit scalaire des deux vecteurs* $\vec{V}$ *et* $\vec{G}$. Cette proposition est en évidence si l'on donne à l'un des vecteurs $\vec{\Phi}$, Φ' du couple le point A comme origine. On a alors

$$\vec{V}\cdot[G] = \vec{V}\cdot\vec{\Phi}' .$$

On vérifie immédiatement sur la figure que le tétraèdre construit sur $\vec{V}$ et $\vec{\Phi}'$ est mesuré par le produit scalaire $\vec{V}.\vec{G}$. On a donc

$$\vec{V}\cdot[G] = \vec{V}.\vec{G} .$$

12. *Produit de deux systèmes* $\vec{S}$ *et* $\vec{S}'$ *en fonction de leurs éléments de réduction* $\vec{R}$, $\vec{G}$, $\vec{R}'$, $\vec{G}'$ *en un même point* O. On a évidemment

$$\begin{aligned}\vec{S}\cdot\vec{S}' &= (\vec{R} + [G])\cdot(\vec{R}' + [G']).\\ &= \vec{R}\cdot\vec{R}' + \vec{R}\cdot[G'] + [G]\cdot\vec{R}' + [G]\cdot[G'] .\end{aligned}$$

En utilisant les §§ 8, 10, 11, on en déduit

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = \vec{R}.\vec{G}' + \vec{R}'.\vec{G} .$$

Si X, Y, Z, L, M, N et X′, Y′, Z′, L′, M′, N′ sont les coordonnées de $\vec{S}$ et $\vec{S}'$ par rapport à trois axes rectangulaires issus de O, cette formule s'écrit

$$\vec{S}\cdot\vec{S}' = LX' + MY' + NZ' + L'X + M'Y + N'Z .$$

13. *Carré d'un système de vecteurs.* On a, d'après le § 12,

$$\vec{S}^2 = 2\vec{R}.\vec{G} .$$

On peut donc exprimer l'égalité d'un système de vecteurs à un vecteur unique ou à un couple en annulant son carré.

APPLICATION AUX COMPLEXES LINÉAIRES.

14. On sait qu'un *complexe linéaire* Γ peut s'identifier avec la famille formée par les droites D de moment nul d'un système de vecteurs $\vec{S}$. Si donc $\vec{V}$ désigne un vecteur porté par l'une de ces droites D, l'équation du complexe s'écrit

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 . \qquad (1)$$

Les droites du complexe Γ qui rencontrent une droite Δ_1 s'obtiennent en prenant les solutions communes aux équations

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 , \qquad \vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 , \qquad (2)$$

U_1 désignant un vecteur porté par Δ_1.

L'une de ces équations peut se remplacer par une combinaison des deux :

$$\vec{V}\cdot\vec{S} + \lambda\vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 , \qquad \text{ou} \qquad \vec{V}\cdot(\vec{S} + \overline{\lambda}\vec{U}_1) = 0 . \qquad (3)$$

Si je détermine λ par la condition

$$(\vec{S} + \lambda\vec{U}_1)^2 = 0 , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \vec{S}^2 + 2\lambda\vec{S}\cdot\vec{U}_1 = 0 , \qquad (4)$$

le système $\vec{S} + \overline{\lambda}\vec{U}_1$ est égal à un vecteur unique $\vec{U}_2$; on est alors conduit à prendre les solutions communes aux équations

$$\vec{V}\cdot\vec{U}_1 = 0 , \qquad \vec{V}\cdot\vec{U}_2 = 0 . \qquad (5)$$

Les droites du couple Γ qui rencontrent une droite Δ_1 rencontrent donc une deuxième droite Δ_2. Δ_1 et Δ_2 sont dites *conjuguées*.

L'égalité

$$\vec{S} + \lambda\vec{U}_1 = \vec{U}_2 \qquad \text{ou} \qquad \vec{S} = \vec{U}_2 - \lambda\vec{U}_1 \qquad (6)$$

montre qu'on peut réduire le système $\vec{S}$ à deux vecteurs ($-\lambda\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$) portés par deux droites conjuguées.

15. On vérifie de même que les droites communes à deux complexes linéaires Γ et Γ' rencontrent deux droites fixes; le système formé par les équations des deux complexes

$$\vec{V}\cdot\vec{S} = 0 , \qquad \vec{V}\cdot\vec{S}' = 0 , \tag{7}$$

équivaut, en effet, aux deux équations

$$\vec{V}\cdot(\vec{S} + \lambda_1 \vec{S}') = 0 , \qquad V\cdot(S + \lambda_2 S') = 0 , \tag{8}$$

λ_1 et λ_2 étant racines de l'équation

$$(\vec{S} + \lambda\vec{S}')^2 = 0 . \tag{9}$$

16. Soient trois complexes linéaires Γ, Γ', Γ'', définis par trois systèmes de vecteurs $\vec{S}$, $\vec{S}'$, $\vec{S}''$. Il existe une infinité de systèmes de la forme $\vec{S} + \overline{\lambda'}\vec{S}' + \overline{\lambda''}\vec{S}''$ égaux à un vecteur unique. La condition est, en effet,

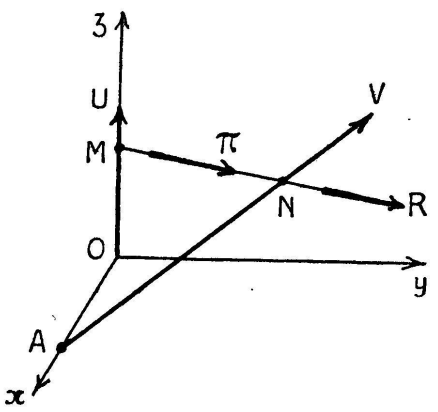
$$(S + \lambda' S' + \lambda'' S'')^2 = 0 , \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$\lambda'^2 \vec{S}'^2 + 2\lambda'\lambda''\vec{S}'\cdot\vec{S}'' + \lambda''^2 \vec{S}''^2 + \ldots = 0 . \tag{11}$$

Si l'on prend trois solutions $(\lambda'_1, \lambda''_1; \lambda'_2, \lambda''_2; \lambda'_3, \lambda''_3)$ de cette équation, on obtient ainsi trois systèmes $\vec{S} + \lambda'\vec{S}' + \lambda''\vec{S}''$ réduits respectivement à des vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$, $\vec{U}_3$. Les droites communes aux trois complexes rencontrent les trois droites supports de U_1, U_2, U_3. Elles forment donc la moitié d'une quadrique. Les résultantes des systèmes $\vec{S} + \lambda'\vec{S}' + \lambda''\vec{S}''$, qui vérifient l'équation (11), forment l'autre moitié.

Une deuxième espèce de multiplication.



17. Définition. — J'appelle *produit de deuxième espèce de deux vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et je désigne par la notation $\vec{U}\times\vec{V}$, le système de vecteurs $\vec{P}$ défini de la manière suivante :

Son axe central est la perpendiculaire commune MN à $\vec{U}$ et $\vec{V}$.