Société mathématique suisse.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

23. — DELAPORTE (Ligue Chronos, Paris), *Sur la réforme du calendrier.*

Le prochain congrès doit se tenir à *Rouen*. Le président de section sera M. LELIEUVRE, le secrétaire M. A. GÉRARDIN.

Société mathématique suisse.

Neuchâtel, 31 août 1920.

La Société mathématique suisse a tenu sa dixième réunion ordinaire à Neuchâtel, le 31 août 1920, sous la présidence de M. le Prof. Louis CRELIER (Berne), à l'occasion de la cent-unième assemblée annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles. Le programme de la partie scientifique comprenait douze communications. En voici les résumés.

1. — Dr Ch. WILLIGENS (Berne). — *Sur l'interprétation du temps universel dans la théorie de la relativité.* — Si dans la transformation de Lorentz

$$x = \beta(x' + \alpha u') \ , \qquad u = \beta(u' + \alpha x') \ , \qquad y = y' \ , \qquad z = z' \ ,$$

où

$$u = c_0 t \ , \qquad u' = c_0 t' \ ; \qquad \alpha c_0 = v \ , \qquad \beta^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2} \ ,$$

c_0 désignant la vitesse de la lumière, on pose

$$u = ct + r \qquad u' = c't - r$$

on arrive, tout calcul fait[1], aux relations

$$x = x' + vt \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} c_0 \tau &= \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x = c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x' \\ c_0 \tau' &= c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x = \frac{c_0}{\beta} t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Supposons l'observateur placé sur S. Comme tous les points de S′ sont au repos, on a

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta\tau = \Delta t \ . \tag{3}$$

Les horloges marchent donc toutes également vite. Les for-

[1] Ch. WILLIGENS. Interprétation géométrique du temps universel dans la théorie de la relativité restreinte. *Archives des sciences physiques et naturelles*, 5e période, vol. 2, juillet-août 1920.

mules (2) mettent en évidence le caractère de la relativité, à savoir un déphasage par rapport à l'horloge locale de l'observateur. En outre, il résulte de (3) que ce mode de mesure du temps doit conduire aux mêmes équations différentielles que si l'on introduit le paramètre t.

Les relations (2), linéaires en x, x', τ, τ' et t représentent des droites dans les diagrammes de Minkowski. Ce sont des droites de simultanéité absolue. L'auteur s'est proposé d'étudier l'ensemble formé par ces droites, lorsque la vitesse v de S' prend toutes les valeurs possibles. Il est commode d'introduire des imaginaires en posant

$$\alpha = ia \qquad c_0 = -i\overline{c_0} \qquad b = \frac{1}{1+a^2} \qquad \frac{1-b}{ab} = m = \operatorname{tg}\varphi$$

$b = \cos 2\varphi$.

La transformation de Lorentz représente la rotation du système d'axes $(x, \overline{c_0\tau})$ d'un angle 2φ autour de l'origine. La première relation (2) prend la forme

$$\overline{c_0}\tau = mx + \overline{c_0}t\frac{1+m^2}{1-m^2}$$

représentant une parallèle à la bissectrice de xOx'. Supposons t constant et faisons varier m. La droite enveloppe une courbe définie par les relations :

$$x = \overline{c_0}t\frac{4m}{(1-m^2)^2}, \qquad \overline{c_0}\tau = c_0 t\frac{1-4m^2-m^4}{(1-m^2)^2}.$$

Si t varie on obtient des courbes homothétiques par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant t. Pour un système S' donné on aura les droites de simultanéité en menant à ces courbes les tangentes parallèles à la bissectrice de xOx'. On n'a qu'une seule de ces tangentes par courbe.

Si on n'introduit pas les imaginaires, les axes Ox' et Ou' sont conjugués par rapport aux hyperboles équilatères :

$$x^2 - u^2 = 1, \qquad x^2 - u^2 = -1.$$

Les droites de simultanéité sont représentées par une relation de la forme :

$$c_0\tau = \mu x + c_0 t\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \qquad \mu = \frac{\beta-1}{\alpha\beta}$$

elles sont parallèles à la droite joignant les points d'intersection de Ou et Ou' avec l'une des hyperboles et ont pour enveloppe

$$x = c_0 t\frac{4\mu}{(1+\mu^2)^2}, \qquad c_0\tau = c_0 t\frac{1+4\mu^2-\mu^4}{(1+\mu^2)^2}.$$

Ce sont des hypocycloïdes à trois rebroussements homothétiques par rapport à l'origine, t étant rapport d'homothétie.

On voit que t est indépendant de α, et que seules les droites de simultanéité en dépendent.

En particulier, si $\alpha = 0$ on a $m = \mu = 0$. $t = \tau$. Les valeurs de t sont donc identiques aux valeurs de τ quand on ne s'occupe pas du système S'.

2. — Prof. G. Pólya (Zurich). — *Sur les fonctions entières.* — Soit $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$ une fonction entière,

$M(r)$ le maximum de $|g(z)|$ dans le cercle $|z| \leqq r$,

$N(r)$ le nombre de zéros de $g(z)$ dans le même cercle,

$n(r)$ l'indice du plus grand des termes $|a_0|$, $|a_1| r$, $|a_2| r^2$, ...

$\Lambda = \overline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{\lg \lg M(r)}{\lg r}$ l'ordre apparent de $g(z)$.

I. D'un théorème général sur les suites infinies découlent les inégalités suivantes

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{\lg M(r)} \leqq \Lambda \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{\lg M(r)}, \tag{1}$$

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r)}{\lg M(r)} \leqq \Lambda . \tag{2}$$

Il existe une fonction $\varphi(\Lambda)$ s'annulant pour $\Lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$, positive, quand Λ n'est pas entier, et telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r)}{\lg M(r)} \geqq \varphi(\Lambda) . \tag{3}$$

On a

$$\varphi(\Lambda) = \frac{\sin \pi\Lambda}{\pi} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \Lambda \leqq 1$$

$$\frac{1}{\varphi(\Lambda)} = \frac{\Lambda\, 2^{1-\Lambda}}{(2-\Lambda)(\Lambda-1)} + \int_0^1 \frac{x^{\Lambda-1}\, dx}{(1+x)^{\Lambda}}, \qquad \text{pour} \quad 1 < \Lambda < 2$$

Les inégalités données ne sauraient être resserrées davantage, le signe $=$ étant valable pour certaines fonctions particulières. Par exemple, les inégalités (2) et (3) se changent en égalités pour $\sigma(z)$ respectivement pour $\xi(\sqrt{z})$; $\sigma(z)$ désigne la fonction de *Weierstrass*, un carré étant pris comme parallélogramme des périodes, $\xi(z)$ désigne la fonction de *Riemann*.

II. Si $\left|\dfrac{a_1}{a_0}\right|^2 + \left|\dfrac{a_2}{a_1}\right|^2 + \ldots + \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|^2 + \ldots$ converge, le genre de $g(z)$ est 0 ou 1. La démonstration de cette proposition se base sur

un théorème d'algèbre de M. *J. Schur*. Une autre démonstration se basant sur des considérations moins particulières serait désirable, parce qu'elle devrait probablement s'écarter des méthodes usuelles.

3. — Prof. L. Lichtenstein. (Berlin). — *Sur les problèmes mathématiques concernant la forme des corps célestes.* — Le problème de la forme des corps célestes a, depuis la découverte du calcul infinitésimal, occupé nombre de mathématiciens éminents, au XVIIIe siècle *Mac Laurin, D'Alembert, Clairaut, Legendre* et, surtout, *Laplace* qui consacra à cet objet le tome II de sa « Mécanique céleste ». Au XIXe siècle, des recherches de *Dirichlet, Jacobi, Liouville* et *Riemann* sur la figure ellipsoïdique d'un fluide tout d'abord, puis surtout, des travaux de *Poincaré* (1885) et de *Liapounoff* (1884) amenèrent un nouveau progrès.

Dans un travail connu des Acta matematica (1885) Poincaré énonce le théorème suivant : Soit T une figure d'équilibre d'un fluide homogène tournant avec la vitesse angulaire ω. En général à toute valeur voisine de ω, disons $\omega + \Delta\omega$, correspond une figure d'équilibre T_1 voisine de T. Dans certains cas cependant à $\omega + \Delta\omega$ peuvent correspondre plusieurs ou aucune figure T_1. ($\Delta\omega > 0$ ou $\Delta\omega < 0$). En T se présente une « bifurcation de la figure d'équilibre ». La démonstration que donne Poincaré de ses théorèmes fondamentaux n'a guère qu'une valeur heuristique. Dans le cas spécial des ellipsoïdes de *Mac Laurin* et de *Jacobi*, la démonstration complète a été donnée par *Liapounoff* dans une suite de travaux fondamentaux, qui parurent entre 1903 et 1916. Les travaux de Liapounoff contenaient en outre la solution complète du problème de la stabilité dans sa forme ordinaire, de même que de nombreuses considérations accessoires — tout cela pour les ellipsoïdes fluides.

Dans deux travaux parus dernièrement, [Mathematische Zeitschrift Bd 1 (1918) et Bd 7 (1920)] j'ai, entre autres choses, démontré les théorèmes de Poincaré pour une figure d'équilibre quelconque. La méthode de démonstration représente, en partie, une généralisation et une simplification de la méthode de Liapounoff; d'autre part, elle introduit plusieurs points de vue nouveaux, en particulier quant à la théorie du potentiel. Les moyens dont on dispose dès lors permettent d'obtenir la solution exacte d'un grand nombre de problèmes classiques. On peut considérer la confirmation de la Théorie de Laplace concernant l'anneau de Saturne comme le plus important de ces résultats. Laplace le premier a étudié les figures d'équilibres possibles d'un anneau fluide tournant autour d'un axe, et trouvé que sa section, en première approximation, est elliptique. Plus tard, Madame S. Kowalewsky a poussé l'approximation un pas plus loin. L'existence

de figures d'équilibres en anneau est aussi peu prouvée par ces travaux que par ceux postérieurs de Poincaré.

Comme autre résultat, nous citerons la confirmation de la théorie de la Lune, de Laplace.

On peut admettre qu'il serait maintenant aussi possible de traiter, entre autres et de façon relativement simple, des anneaux qui ne soient pas nécessairement homogènes, en particulier des anneaux gazeux.

4. — Prof. L. G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur les idéaux de nombres hypercomplexes.* — En cherchant à étendre à tous les systèmes de nombres complexes les propriétés des nombres entiers, comme Gauss l'avait fait avec un plein succès pour les nombres complexes ordinaires, les géomètres découvrirent que certains systèmes ne se prêtent pas à cette généralisation. Par exemple, la décomposition d'un nombre complexe entier en facteurs premiers, décomposition toujours possible, n'est pas toujours univoque. Il en résulte qu'un produit peut être divisible par un nombre entier sans qu'aucun des facteurs ne le soit, et quantité d'autres irrégularités. La théorie des idéaux, comme on le sait, fait tomber ces anomalies par un ingénieux changement de méthode. En faisant intervenir des idéaux de nombres, c'est-à-dire certains ensembles de nombres entiers, à propriétés caractéristiques bien déterminées, au lieu d'opérer sur les nombres considérés isolément, Dedekind réussit à rétablir la simplicité arithnomique qui se manifeste dans l'arithmétique ordinaire. — Le domaine où la théorie des idéaux est applicable avec succès embrasse tous les corps de nombres algébriques dont on s'est occupé jusqu'ici : d'une part, les systèmes où se maintient l'ancienne théorie des nombres, qui ne fait pas intervenir le concept d'idéal, d'autre part une infinité de systèmes où cette ancienne arithmétique n'est pas valable. Aussi croyait-on la théorie des idéaux d'une efficacité absolue, lorsqu'il s'agissait d'obtenir une arithnomie régulière. Or, il existe des systèmes de nombres complexes à multiplication associative, distributive et commutative, et contenant les nombres réels comme sous-groupe, où même la théorie des idéaux ne conduit pas à une arithmétique simple comparable à la classique. — Soit, dans l'un de ces systèmes, a un idéal non principal. Il peut arriver que la série de ses puissances successives

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ldots,\ a^n,\ \ldots\ \ \textit{ad infin}.$$

ne contienne aucun idéal principal. L'un des fondements de la théorie de Dedekind est ainsi détruit. Le conférencier indique le système le plus simple possible de nombres complexes où cela se

produit, et termine sa communication en signalant quelques problèmes nouveaux qui surgissent de ce fait dans le domaine des nombres complexes généraux.

5. — Dr G. Tiercy (Genève). — *Une nouvelle propriété des courbes orbiformes.* — *1.* On appelle *orbiformes* des courbes fermées convexes, de largeur constante. Leur équation polaire tangentielle s'écrit :

$$p(\omega) = a[1 + f(\omega)] \ , \qquad \text{avec} \qquad f(\omega + \pi) = -f(\omega) \ .$$

Considérons un point M de contact se mouvant sur une orbiforme, de telle manière que l'angle polaire tangentiel augmente proportionnellement au temps : $\omega = \theta t + \omega_0$; la projection P du point M sur un axe est animée d'un mouvement oscillatoire, auquel nous donnerons le nom de *mouvement harmonique d'orbiforme.*

2. Considérons plusieurs mouvements harmoniques d'orbiformes, d'amplitude a_i différentes, d'époques tangentielles ε_i différentes, mais de même période tangentielle :

$$p_i = a_i[1 + f_i(\omega_i)] \ , \qquad \omega_i = \omega + \varepsilon_i \ .$$

Composons les normales p_i; soient $\overline{OS}$ la résultante, $\overline{OR}$ sa projection sur l'axe des x, et $\overline{ON}$ sa projection sur l'axe des y.

Puis, donnons à ω un accroissement π ; et composons les nouveaux rayons vecteurs tangentiels $p_i(\omega_i + \pi)$; soient $\overline{OS'}$ la résultante, $\overline{OR'}$ et $\overline{ON'}$ ses projections sur les axes de coordonnées.

En posant :

$$\Sigma a_i \cos \varepsilon_i = A \cos \varepsilon \ , \qquad \Sigma a_i \sin \varepsilon_i = A \sin \varepsilon \ ,$$

on obtient :

$$\overline{R'R} = 2A \cos(\omega + \varepsilon) \ , \qquad \overline{N'N} = 2A \sin(\omega + \varepsilon) \ .$$

On trouve donc la propriété que voici : *le segment de droite* $\overline{SS'}$ *est de longueur constante égale à* 2A ; *et l'angle qui l'oriente présente une différence constante* $(\varepsilon - \varepsilon_i)$ *avec chacune des phases* ω_i. D'ailleurs, le rayon vecteur tangentiel $\overline{OS}$ ne définit pas une orbiforme.

3. On trouve facilement que la distance de l'origine à la droite $\overline{SS'}$ vaut :

$$P\omega) = \Sigma a_i[1 + f_i] \sin(\varepsilon - \varepsilon_i) \ ;$$

or il vient :

$$P(\omega) + P(\omega + \pi) = 0 \ .$$

La courbe enveloppe de la droite $\overline{SS'}$ *est donc une courbe d'envergure nulle,* c'est-à-dire n'admettant qu'une seule et unique tangente parallèle à une direction donnée.

Par conséquent, les courbes convexes parallèles à la courbe $P(\omega)$, et les développantes convexes de cette même courbe, seront de nouvelles orbiformes.

4. Dans le cas où les ε_i sont égaux, les rayons p_i sont portés par la même droite ; alors :

$$P(\omega) = 0 ,$$

et *la résultante* $\overline{OS}$ *des rayons* p_i *définit directement une nouvelle orbiforme, de largeur* $2A = 2\Sigma a_i$.

Si P est le point animé du mouvement harmonique d'orbiforme final, et si P_i sont les points animés des mouvements harmoniques donnés, on a en outre :

$$\overline{OP} = \Sigma \overline{OP_i} .$$

On remarquera que l'énoncé de ce théorème est identique à celui de la loi de Fresnel, donnant la composition de plusieurs mouvements harmoniques simples de même période.

6. — Emch (Urbana, U. S. A.). — *Sur les incidences de droites et de courbes algébriques planes dans l'espace et les surfaces qui en résultent.* — Lüroth[1] a traité des problèmes de cette sorte pour le cas le plus simple des sections coniques. Par l'emploi systématique de formules d'incidence, sous une forme élégante, Emch réussit à obtenir, non seulement tous les résultats de Lüroth, mais des résultats généraux pour les courbes de n^{me} ordre, par une méthode analytique relativement simple. Voici quelques-uns de ses principaux résultats :

1. *Le système de plans, tels que chacun coupe* $\frac{n(n+3)}{2} + 1$ *droites indépendantes dans l'espace en des points situés sur une courbe du* n^{me} *ordre est une surface de la classe* $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$.

2. *Les courbes planes de* n^{me} *ordre, dont les plans passent par une droite fixe et qui coupent* $\frac{n(n+3)}{2}$ *droites indépendantes dans l'espace, engendrent une surface d'ordre* $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$.

3. *Les courbes planes de* n^{me} *ordre qui coupent* $\frac{n(n+3)}{2} + 2$

[1] Sur le nombre des coniques qui coupent 8 droites dans l'espace. *Journ. de Crelle*, p. 185-192 (1868).

droites indépendantes dans l'espace, chacune en un point simple, forment une surface développable de la classe

$$\frac{n^2(2n^4 + 12n^3 + 17n^2 - 3n + 8)}{18}.$$

4. *Etant données* $\frac{n(n+3)}{2} + 3$ *droites indépendantes dans l'espace, il existe*

$$\frac{n^3(n^2 + 3n + 2)(n^4 + 6n^3 + 4n^2 - 15n + 4)}{27}$$

courbes de n^{me} *ordre coupant chacune de ces droites. Dans le cas* $n = 2$ *(Lüroth) ce nombre est* 92.

5. *Soient les courbes planes de* n^{me} *ordre qui coupent une courbe plane donnée de* n^{me} *ordre en* n *points et* $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ *droites indépendantes dans l'espace; les plans de ces courbes forment une surface de la classe* $\frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$.

6. *Même énoncé que le précédent avec* $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ *droites indépendantes dans l'espace; la surface est développable et de la classe* $\frac{n^2(4n^4 + 12n^3 + 19n^2 + 24n + 49)}{36}$.

7. *Il existe*

$$\frac{n^3(8n^6 + 36n^5 + 66n^4 + 99n^3 + 123n^2 + 89n + 343)}{216}$$

courbes planes de n^{me} *ordre, qui coupent une courbe plane donnée de* n^{me} *ordre en* n *points et* $\frac{n(n+1)}{2} + 3$ *droites indépendantes dans l'espace.*

En particulier :

8. *Il existe* 175 *cercles coupant* 6 *droites indépendantes dans l'espace.*

7. — Prof. F. Gonseth (Berne). — *Sur une application de l'équation de Fredholm.* — Il s'agit de la détermination d'une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + l(x)y = m(x)$$

lorsque la fonction inconnue doit, pour n valeurs données de x, prendre n valeurs données d'avance.

La méthode générale est exposée sur l'équation du 3e ordre :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = d \tag{1}$$

y prenant les valeurs y_1, y_2, y_3 pour $x = x_1, x_2, x_3$.

On considère l'expression

$$y = \int_{x_1}^{x_3} A(xs) f(s)\, ds + V(x) \tag{2}$$

où la fonction $A(xs)$, en général continue, a pour $s = x$ une discontinuité $\alpha(x)$. De même $\frac{\partial A(xs)}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 A(xs)}{\partial x^2}$ présentent au même endroit les discontinuités $\beta(x)$ et $\gamma(x)$.

Quant à la 3e dérivée partielle, elle est supposée identiquement nulle.

Dans ces conditions, $A(xs)$ est de la forme

$$\begin{array}{ll} l_1(x-s)^2 + m_1(x-s) + n_1 & \text{pour } s \leqq x \\ l_2(x-s)^2 + m_2(x-s) + n_2 & \text{pour } s > x \end{array}$$

l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2 et n_2 étant des fonctions arbitraires de s, dont seules les différences $l_2 - l_1 = \frac{\gamma(s)}{2}$ ... etc., joueront un rôle dans la suite.

Dérivons l'équation (1) trois fois de suite : nous obtenons

$$y''' + \alpha(x) f''(x) + [\beta(x) + 2\alpha'(x)] f'(x) + [\gamma(x) + \beta'(x) + \gamma''(x)] f(x) = V'''(x)$$

que nous identifions avec

$$y''' + a(x) f''(x) + b(x) f'(x) + c(x) f(x) = d(x) .$$

Les a, b, c déterminent $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$; quant à $V(x)$ on peut lui ajouter sans rien modifier à la dernière équation, une fonction arbitraire dont la dérivée troisième soit nulle. Nous remplaçons donc (2) par :

$$y = \int_{x_1}^{x_3} A(xs) f(s)\, ds + C_1(x-x_2)(x-x_3) + C_2(x-x_3)(x-x_1) + C_3(x-x_1)(x-x_2) + V(x) \tag{4}$$

exprimant que pour $x = x_1, x_2, x_3$, y prend des valeurs détermi-

nées, on calcule C_1, C_2 et C_3. Ceux-ci étant introduits, l'équation (4) prend la forme :

$$y = \int_{x_1}^{x_3} \overline{A(xs)} f(s)\, d(s) + \overline{V(x)} \; ;$$

et la fonction f ne joue aucun rôle dans $\overline{A}$ et $\overline{V}$. Nous avons donc la possibilité de remplacer f par y et l'équation de Fredholm

$$y(x) = \int_{x_1}^{x_3} \overline{A(xs)}\, y(s)\, ds + \overline{V(x)}$$

résout la question.

La méthode est susceptible de diverses généralisations.

8. — Prof. C. Cailler (Genève). — *Sur un théorème relatif à la série hypergéométrique et sur la série de Kummer.* — L'auteur donne diverses généralisations de la formule, obtenue par lui, il y a quelques années

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\, F[\alpha', \beta', \gamma', y(1-z)]\, dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}(1-y)^{\alpha-\beta'} F(\alpha, \beta, \gamma+\gamma', x+y-xy)$$

laquelle a lieu sous réserve des conditions

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' \; .$$

Parmi ces extensions citons la suivante

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \beta, \gamma, xz)\, F(\alpha', \beta', \gamma', 1-z)\, dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!\,(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'-1)!}{(\gamma+\gamma'-\alpha'-1)!\,(\gamma+\gamma'-\beta'-1)!} F(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta', \alpha, \gamma+\gamma'-\alpha'; x) \, ,$$

qui a lieu moyennant la relation $\beta + \beta' = \gamma + \gamma'$, et

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1} F(\alpha, \gamma; xz)\, F[\alpha', \gamma'; y(1-z)]\, dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!} e^x F(\alpha', \gamma+\gamma'; y-x) \; .$$

Dans cette dernière, F est la fonction de Kummer

$$F(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)x^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \cdots$$

9. — Prof. C. Cailler (Genève). — *Sur un théorème de cinématique.* — M. C. Cailler rappelle d'abord les définitions classiques pour la vitesse d'un point, d'un plan et d'une droite. Cette dernière est une quantité *complexe* formée à l'aide d'une unité ε telle que $\varepsilon^2 = 0$.

Une droite *appartient* à un axe α lorsqu'elle rencontre l'axe sous un angle droit, un point et un un plan *appartiennent* au même axe s'ils y sont contenus.

Ces définitions étant admises, imaginons qu'un point p, un plan ϖ, une droite δ fassent partie d'un solide, tandis que l'axe α auquel ils appartiennent soit fixe dans l'espace.

Nous avons alors le théorème suivant, en quatre parties, dont seule la première est classique.

1° La projection sur α de la vitesse d'un point p, appartenant à α, est la même quel que soit ce point. Soit g'' cette projection constante.

2° La projection sur α de la vitesse angulaire d'un plan appartenant à α est la même quel que soit ce plan. Soit g' cette projection constante.

3° La projection sur α de la vitesse linéaire d'une droite appartenant à α est la même, quelle que soit la droite. Soit g cette projection constante.

4° Entre les trois quantités g, g', g'', dont la première est complexe et les autres réelles, existe la relation

$$g = g' + \varepsilon g'' .$$

10. — Prof. Michel Plancherel (Fribourg) et Edwin Strässle (Stans). — *Sur l'intégrale de Poisson pour la sphère.* — L'intégrale de Poisson

$$U(r, \vartheta, \Phi) = \frac{1}{4\pi} \int_S u(\vartheta', \varphi') \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\omega + r^2} d\sigma'$$

définit, lorsque $u(\vartheta, \varphi)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur la surface sphérique S de rayon 1, une fonction harmonique à l'intérieur de S et l'on sait que $U(r, \vartheta, \varphi) \to u(\vartheta, \varphi)$ presque partout, lorsque $r \to 1$, en particulier aux points de continuité de $u(\vartheta, \Phi)$.

Il ne semble pas que l'étude de la limite pour $r \to 1$ des dérivées $D_{p+q} U(r, \vartheta, \Phi) = \dfrac{\partial^{p+q} U}{\partial \vartheta^p \, \partial \varphi^q}$ ait été faite. La méthode employée par

M. de la Vallée Poussin dans le cas du cercle ne peut être utilisée sur la sphère. On peut, il est vrai, étudier ces dérivées par une méthode directe ; malheureusement les calculs deviennent immédiatement très longs et la méthode ne semble applicable avec succès que pour les petites valeurs de $p+q$. Cette méthode a cependant l'avantage de conduire à des résultats très généraux dans lesquels interviennent les dérivées généralisées de u.

Une méthode plus simple repose sur la remarque suivante : Si dans un domaine Σ de S, u est une fonction analytique du point (ϑ, φ), $U(r, \vartheta, \varphi)$ est prolongeable analytiquement à travers Σ. De cette remarque, à conclure que dans le cas particulier où u est analytique, on a dans Σ, $D_{p+q} U(r, \vartheta, \varphi) \to D_{p+q} u(\vartheta, \varphi)$ lorsque $r \to 1$, il n'y a qu'un pas.

Si u possède au point (ϑ, φ) une différentielle totale d'ordre $n = p + q$, on décomposera à l'aide de la formule de Taylor u en deux parties : $u = u_n + r_n$ telles que u_n soit analytique et qu'au point (ϑ, φ) $d_\nu u_n = d_\nu u$ $(\nu \leqq n)$. U se décomposera d'une manière corrélative en deux parties : $U = U_n + R_n$. On aura au point (ϑ, φ) $D_{p+q} U_n \to D_{p+q} u_n = D_{p+q} u$. Or, on peut montrer, à l'aide des propriétés du facteur de discontinuité $\dfrac{1 - r^2}{1 - 2r \cos co + r^2}$ que $D_{p+q} R_n \to 0$ lorsque $r \to 1$. On obtient ainsi le théorème.

En tout point (ϑ, φ) *où* u *possède une différentielle totale d'ordre* $n = p + q$, *on a* $D_{p+q} U(r, \vartheta, \varphi) \to D_{p+q} u(\vartheta, \varphi)$ *lorsque* $r \to 1$.

Laissant de côté un théorème analogue concernant la convergence uniforme de $D_{p+q} U$ vers $D_{p+q} u$ nous remarquerons, pour terminer, que si $u \sim \Sigma X_n(\vartheta, \varphi)$ est le développement formel de u en série de Laplace, on a $U(r, \vartheta, \varphi) = \Sigma r^n X_n(\vartheta, \varphi)$. Par conséquent, le procédé de sommation de Poisson est applicable au calcul des dérivées de tout ordre de u, là où elles existent.

La même méthode peut s'appliquer à l'étude des dérivées dans d'autres procédés de sommation, tel celui dans lequel le facteur de convergence r^n de Poisson est remplacé par $e^{-n^2 t}$ $(t \to 0)$.

11. — Prof. Michel Plancherel (Fribourg). — *Une question d'Analyse.* — Lors de recherches sur l'inscription d'un carré dans une courbe plane fermée et d'un octaèdre régulier dans une surface fermée, j'ai été amené à résoudre dans un cas particulier le problème suivant.

Soit $y = f(x)$ une courbe continue et univoque dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, telle que dans cet intervalle $f(x) \geqq 0$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Soient M_1, M_2, deux points mobiles sur cette courbe, assujettis à avoir à chaque instant t les mêmes ordonnées. A l'instant $t = 0$, M_1 se trouve au point (a, o), M_2 au point (b, o). Peut-on

coordonner les mouvements de ces deux points de manière à ce qu'ils se rencontrent?

Le problème est équivalent à la détermination de deux fonctions $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ continues dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, telles que pour $0 \leqq t \leqq 1$

$$a \leqq \Phi_1(t) \leqq b, \quad a \leqq \Phi_2(t) \leqq b$$

$$f(\Phi_1(t)) = f(\Phi_2(t))$$

et que, pour $t = 0$

$$\Phi_1(0) = a, \quad \Phi_2(0) = b$$

et pour $t = 1$

$$\Phi_1(1) = b, \quad \Phi_2(1) = a \ .$$

Si $f(x)$ n'a qu'un nombre fini d'extrémas dans (a, b), la résolution du problème est immédiate. Il s'agirait de savoir si la seule hypothèse de la continuité de $f(x)$ est suffisante pour assurer la possibilité du problème; si non, quelles conditions supplémentaires devraient être ajoutées.

12. — R. Wavre (Neuchâtel). — *Sur les développements d'une fonction analytique en série de polynômes.* — Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$$

une fonction analytique définie par son développement de Taylor au voisinage de $x = 0$.

On sait, en vertu d'un important théorème de Mittag-Leffler, que l'on peut donner de $f(x)$ un développement en série de polynômes représentant cette fonction dans tout le plan sauf sur des droites joignant ses points singuliers au point à l'infini.

Soit

$$\mathrm{M}[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} a_0 + c_{1n} a_1 x + \ldots + c_{nn} a_n x^n)$$

un tel développement.

M. Painlevé posait en 1905 la question suivante[1] : Existe-t-il un développement M tel que, quel que soit $f(x)$,

$$\mathrm{M}'[f(x)] \equiv \mathrm{M}[f'(x)] \ .$$

La réponse est négative. En effet, un pareil développement serait

[1] Leçons sur les fonctions de variables réelles, par M. E. Borel, Note de M. Painlevé.

de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} a_0 + c_{0(n-1)} a_1 x + \dots + c_{00} a_n x^n) \qquad \text{avec} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_{0n} = 1 ,$$

appliqué à la fonction $\frac{1}{1-x}$, il divergerait pour $|x| > 1$.

Remarque. — L'auteur a obtenu, peu après la réunion de Neuchâtel, des résultats plus importants en cherchant des développements en série de polynômes d'un type particulier.

13. — Dr S. Bays (Fribourg). — *Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner.* — La question de déterminer le nombre des systèmes de triples de Steiner *différents* semble encore loin d'être résolue. White[1] a montré que pour $N = 31$ déjà, le nombre des systèmes de triples différents dépasse 37×10^{12}. Cole, avec White et Cummings[2], a obtenu les systèmes de triples différents pour $N = 15$; leur nombre est 80. Pour une classe particulière de solutions du problème des triples de Steiner, les systèmes de triples *cycliques*, la question paraît déjà plus aisée. Pour $N = 6n + 1$, premier (ou de la forme p^α), j'ai une méthode permettant d'obtenir les systèmes cycliques de Steiner différents. Elle est basée principalement sur l'emploi des substitutions métacycliques (substitutions de la forme $|x, \alpha + \beta x|$, β premier avec N); et elle donne en même temps les groupes de substitutions qui appartiennent à ces systèmes. Jusqu'ici, à deux exceptions près, ces groupes ne sont jamais que des diviseurs du groupe métacyclique. Dans un premier travail[3], j'avais obtenu les systèmes cycliques différents pour les premières valeurs de N, jusqu'à $N = 31$; j'ai depuis appliqué la méthode aux cas $N = 37$ et $N = 43$. Mes résultats jusqu'ici sont ainsi contenus dans le tableau suivant :

N	n	S″	S′	S
7	1	1	1	1
13	2	1	1	1
19	3	2	4	4
31	5	8	64	80
37	6	32	455	820
43	7	157	3067	9514
25	4	2	15	12

S = nombre des systèmes cycliques de triples de Steiner *différents*.

S′ = nombre des systèmes de *caractéristiques*.

S″ = nombre des systèmes de *caractéristiques irréductibles*.

[1] Transactions of the Amer. Mathem. Society, vol. XXI, (1), 1915, p. 13.
[2] Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. III, 1916, p. 197.
[3] Comptes Rendus, tome 165, p. 543, du 22 oct. 1917.

Le nombre S″, nombre des systèmes de *caractéristiques irréductibles l'un à l'autre* par les substitutions d'un groupe cyclique que je note $\{|\underline{x}, \underline{\alpha x}|\}$, α premier avec N, et où j'entends par l'élément *a la valeur absolue du plus petit reste positif ou négatif de a* (*mod.* $\overline{N}$), est maintenant le nombre intéressant du problème. Le nombre S des systèmes cycliques de Steiner différents n'est plus qu'une fonction simple des systèmes S″. J'entrevois une simplification dans la recherche de ces systèmes S″ qui permettra d'effectuer encore la recherche pour le nombre premier suivant $N = 61$, sans exiger trop de temps. Peut-être alors les données seront-elles suffisantes pour chercher à découvrir la fonction S″ de N (N premier) ?

Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

Pendant l'année universitaire 1919-1920, les universités américaines ont décerné 16 doctorats ès sciences, traitant plus particulièrement de sujets de mathématiques. En voici la liste d'après *The American math. Monthly* (XXII, 11) : E. M. Berry (Iowa) : Diffuse Reflection. — J. D. Bond (Michigan) : Plane trigonometry in Richard Wallingford's Quadri partium de sinibus demonstratis. — J. Douglas (Columbia) : On certain two-point properties of general families of curves. — T. C. Fry (Wisconsin) : The use of divergent integrals in the solution of differential equation. — G. Gibbens (Chicago) : Comparison of different line-geometric representations for functions of a complex variable. — C. F. Green (Illinois) : On the summability and regions of summability of a general class of series of the form $\Sigma c_n g(x+n)$. — J. W. Lasley (Chicago) : Some special cases of the flecnode transformation of ruled surfaces. — E. J. McFarland (California) : On a special quartic curve. — J. J. Nassau (Syracuse) : Some theorems in alternates. — C. A. Nelson (Chicago) : Conjugate systems with conjugate axis curves. — E. L. Post (Columbia) : Introduction to a general theory of elementary propositions. — M. Rambo (Michigan) : The point at infinity as a regular point of certain difference equations of the second order. — L. L. Steimley (Illinois) : On a general class of series of the form $Y(n) = C_0 + \Sigma C_n g(nx)$. — J. L. Walsh (Harvard) : On the location of the roots of the jacobian the two binary forms. — R. Woods (Illinois) : The elliptic mocular functions associated with the elliptic norme curve E^7. — T. Yang (Syracuse) : A problem in differental geometry.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. J. Bauschinger, anciennement professeur d'Astronomie à l'Université de Strasbourg, a été appelé à la chaire d'Astronomie de l'Université de Leipzig.