BIBLIOGRAPHIE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Repet., 1; Uebgn., 2. — PLANCHEREL : Théorie des fonctions, 2; Variationsrechnung, 2; math. Sem. — WEYL : Analyt. Geometrie, 3; Vektoranalysis, 1; Analysis situs. 2; math. Sem. — POLYA : Einf. in d. Analysis reeller Grössen, I, 2; Analyt. Zahlentheorie, 2. — BÆSCHLIN : Vermessungskunde, 4; Höh. Geodäsie, 3; Repet., 1. — WOLFER : Einleitung in die Astronomie, 3; Uebgn., 2; Bahnbestimmungen von Planeten u. Kometen, 2. — AMBERG : Einführung in den math. naturw. Unterricht. — MARCHAND : Les méthodes statistiques de recherches, 1.

Cours libres. — BEYEL : Rechenschieber mit Uebgn., 1; Darst. Geometrie: 2; Flächen 2. Grades, 1. — KIENAST : Funktionentheorie, 2. — KRAFT : Vektoranalysis, 1; Geometrische Analysis, 3.

BIBLIOGRAPHIE

P. APPELL. — **Education et Enseignement.** Notices et Discours. (Nouvelle Collection scientifique E. Borel.) — 1 vol. in-8° de VIII-304 pages; 8 fr.; F. Alcan, Paris, 1922.

Ce Recueil de Notices et de Discours constitue un exposé des idées de M. Appell sur la Science et l'Enseignement. Précieuses alors qu'elles étaient éparses, elles le seront bien davantage encore sous la forme d'un volume qui devrait être un livre de chevet pour tous les professeurs et pour ceux de leurs élèves qui s'interrogent, parfois un peu anxieusement, sur la meilleure manière d'utiliser leurs connaissances.

L'ouvrage sera d'une analyse plus facile si l'on rassemble d'abord les titres des différents articles. I. La géométrie infinitésimale. — II. L'analyse mathématique. — III. De l'expérience en géométrie. — IV. L'éducation de la jeunesse. — V. Un mathématicien (Jacobi). — VI. L'avenir de la Science dans les Universités. — VII. L'Alsace pendant l'oppression allemande. — VIII. La Chimie et l'Industrie. — IX. L'Ecole normale supérieure en 1906. — X. L'Ecole normale en 1907. — XI. L'Enseignement des Sciences et la formation de l'esprit scientifique. — XII. Les Universités régionales. — XIII. Les sciences dans l'Education nationale. — XIV. L'Université de Paris. — XV. La Faculté des Sciences de Paris. — XVI. Relations avec l'Amérique latine. — XVII. L'avenir de l'aviation. — XVIII. Deux mathématiciens français (G. Darboux et H. Poincaré). — XIX. Henri Poincaré. — XX. La Météorologie. — XXI. Les travaux publics après 1871. — XXII. Le lycée de Nancy en 1873. — XXIII. L'Ecole normale et la botanique. — XXIV. Le rôle des recherches scientifiques. — XXV. La guerre. — XXVI. Les sciences et la guerre. — XXVII. L'Alsace après la délivrance. — XXVIII. L'œuvre du secours national. — XXIX. La Société des Nations. — XXX. La résurrection de Reims. — XXXI. Morts pour la France. — XXXII. La Pologne libre.

Il n'est point possible assurément de reproduire ici toutes les idées contenues dans ces trente-deux écrits, mais les conclusions qui s'en dégagent sont

merveilleusement unitaires et ne se dérobent point à un bref tableau d'ensemble.

La Notice I se rapporte à Ossian Bonnet, esprit géométrique prophétique à tant d'égards. On lui doit surtout une formule unissant la courbure géodésique d'un contour et la courbure totale d'une cloison, ce qui est probablement la première formule du type stokien, contenant une courbure superficielle, qui soit apparue en Géométrie.

En III, il s'agit des idées philosophiques de M. de Freycinet sur l'origine expérimentale de cette science. On pourrait encore les méditer à l'heure actuelle et se convaincre ainsi que bien des choses intéressantes ont été dites entre Riemann et Einstein.

En II et V nous trouvons Hermite et Jacobi. Que dire sur de si grands noms; ce qu'on oublie parfois c'est l'extrême déférence d'un véritable homme de génie vis-à-vis d'un autre plus âgé qu'il doit considérer comme un maître. Les lettres de Jacobi à Legendre et d'Hermite à Jacobi sont des modèles du genre. Cela doit nous consoler des misérables élucubrations que des universitaires déshonorant leur poste et heureusement en fort petit nombre dirigent parfois contre des travaux qu'ils ne peuvent comprendre et qui émanent de personnalités incomparablement supérieures à la leur.

En IV M. Appell dit aux élèves du Lycée Saint-Louis: « Je trouve que vous apprenez trop de détails, qu'on vous fait trop de cours....; nous procédons comme si l'imprimerie n'était pas inventée... ! »

En VI il fait l'apologie des travaux originaux: « Un établissement scientifique dont les professeurs se consacreraient uniquement à l'exposé de la science que d'autres ont faite serait voué à une décadence rapide. »

En XI, il donne une définition du savant: c'est l'homme qui doit avoir l'esprit de recherche, une curiosité toujours en éveil, une patience inlassable et surtout de l'initiative. Il s'élève, avec M. André Pelletan, contre l'idée du concours suffisant à classer un individu pour toute sa vie.

En XIII, la Science établit une autorité incontestée, celle du fait objectif, à une époque où l'autorité basée sur les conventions sociales tend à disparaître. Le baccalauréat est énergiquement pris à partie: il divise la nation en deux castes dont l'une seulement peut prétendre à toutes les fonctions publiques. Le titre, le parchemin, fût-il scientifique, est un préjugé de l'esprit littéraire.

En XV, ce malheureux baccalauréat n'est, dans les Facultés scientifiques, qu'une survivance du passé. Bravo ! Comme on comprend cela quand on enseigne et qu'on examine dans une Faculté pourvue de nombreux instituts techniques !

En XVIII et XIX nous revenons à de grands savants. Signalons des documents peu connus: les notes obtenues par Henri Poincaré à ce toujours maudit baccalauréat. Et cela tourne encore un petit peu plus au désavantage du diplôme.

L'article XXI est l'éloge d'un savant technicien d'origine alsacienne, M. Alfred Picard.

En XXII nous revenons à Henri Poincaré, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Nancy. On trouve chez l'élève l'esprit humoristique qui transparaissait encore quelquefois, plus tard, chez le grand homme

En XXIII il s'agit de Van Tieghem, type du savant cherchant la Vérité *une*, sans aucune relativité, aussi bien dans la Science que dans la vie.

Les derniers discours ou écrits se rapportent à la guerre, au terrible

phénomène qui, si l'on y comprend ses répercussions, n'a point cessé de secouer effroyablement le monde depuis 1914. M. Appell en a suivi les péripéties avec un dévouement inlassable pour les œuvres qui, comme le Secours National, s'efforçaient d'adoucir tant de misères, et avec une confiance inébranlable en une fin juste qui rendrait aux Alsaciens, en particulier à lui et aux siens, la patrie autrefois perdue. Une foi ardente est dans ces pages. Aux élèves du Lycée de Reims, récemment rouvert, il demande de représenter la France au travail de même que les aînés ont représenté la France aux armées. Pour l'éminent géomètre, il est évident que le patriotisme se prouve d'abord en travaillant. Et le travail apporte par surcroît une tranquillité d'esprit qui ne se dément pas dans les circonstances les plus sombres.

Qu'il me soit permis ici de terminer par une anecdote qui me paraît se placer tout naturellement avec tant d'autres qui vont au cœur.

C'était dans les premières semaines de la guerre. Nos troupes battaient en retraite après Charleroi. Faut-il rappeler quelle angoisse nous étreignait. Pour ma part, le travail original était impossible et je devais avoir de nombreux imitateurs car, en août 1914, les Notes mathématiques étaient à peu près absentes des Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Le 7 septembre parut une communication de M. Appell, *Sur une transformation de certaines fonctions déduites des fonctions* Θ *de degrés supérieurs*. Je la lus vers le 15; à cette date la victoire de la Marne était acquise ! Nous pouvions admirer l'héroïsme de nos soldats et, par surcroît, les propriétés des fonctions Θ. Mais M. Appell avait dû évidemment travailler à ce sujet justement avant le prodigieux revirement qui sauvait la France, dans des jours si sombres qu'on pouvait les croire désespérés. Personne n'imaginera qu'il avait réussi à s'abstraire du terrible drame mais il avait tenu, sans doute, à donner un exemple de calme et de courage qui, pour ma part, me ramena immédiatement à la recherche mathématique !

A. Buhl (Toulouse).

Henri Bergson. — **Durée et simultanéité,** à propos de la théorie d'Einstein. — 1 vol. in-16, viii+245 p., 8 fr., Felix Alcan, Paris 1922.

Rappelons que le problème de la durée, « la clef des plus gros problèmes philosophiques », fut le principal objet des études si profondes et philosophiquement si remarquables du grand philosophe français.

Depuis plus de trente ans il oppose le temps réel et psychologiquement vécu au temps mathématique projeté dans l'espace.

Plus d'un penseur attendaient, avec quelque impatience, qu'il voulût bien se prononcer sur la conception du temps, que les physiciens ont dégagé des formules d'Einstein-Lorentz et c'est par là qu'une analyse bibliographique de ce petit livre peut prendre place ici.

Les théories d'Einstein attirèrent son attention dès 1911. Ce travail de subtile méditation, il l'avait entrepris sans songer à le publier, mais, comme nous l'indique la préface, il se rendit bientôt compte qu'il présentait un intérêt général.

M. Bergson tente de légitimer philosophiquement, par des arguments qui paraîtront peut-être un peu spécieux, la notion commune du temps universel. Cette étude contient un examen très profond de l'expérience de Michelson, de la transformation de Lorentz ainsi que de la métaphysique que l'on a tenté de dégager, trop hativement, de la conception relativiste.

« Cet examen, dit M. Bergson, nous donna un résultat assez inattendu. Non seulement les thèses d'Einstein ne paraissaient plus contredire, mais encore elles confirmaient, elles accompagnaient d'un commencement de preuve la croyance naturelle des hommes à un temps unique et universel. Elles devaient simplement à un malentendu leur aspect paradoxal. »

Au début de son étude M. Bergson semble refuser aux physiciens le droit de parler, à la fois, de deux observateurs en chair et en os, O et O′, dans deux systèmes S et S′ en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Si x et t sont des intervalles d'espace et de temps effectivement mesurés ou vécus par l'observateur O, les quantités correspondantes par la transformation de Lorentz, x' et t', ne sont que des fictions mathématiques et non des quantités effectivement mesurées. L'horloge de s' ne marque pas t', semble-t-il, quoique l'affirmation de l'auteur ne soit pas absolument formelle sur ce point.

Le point de vue de M. Bergson est donc opposé à celui des physiciens. Plus que cela, les expériences faites sur le déplacement des raies spectrales semble l'infirmer. Plus loin, cependant, M. Bergson déclare que l'équivoque impliquée dans l'interprétation des thèses d'Einstein est d'ordre plutôt métaphysique et qu'il est très difficile de la démasquer. Aussi, s'efforce-t-il de la faire entrevoir dans plusieurs exemples, dont il fait par ailleurs une analyse des plus fines et en retournant la question sur toutes ses faces. Cette équivoque, sur le terrain de la physique, nous déclarons ne pas l'apercevoir. Nous oserions même avancer, malgré la très grande autorité de l'auteur et le respect que nous lui vouons, que son attitude présente quelques flottements. Il semble avoir mis à la fin de son étude beaucoup d'eau dans son vin. Reprenons l'argument fondamental qui tend à légitimer l'hypothèse d'un temps unique et universel.

Supposons deux systèmes S et S′ en translation uniforme. Nous pouvons toujours supposer en plus que S′ est un duplicata de S. En vertu du principe de relativité S et S′ sont interchangeables et leur différence est indiscernable, lorsqu'on se place à l'intérieur de l'un ou de l'autre de ces deux systèmes. Donc, il est naturel de supposer qu'ils vivent un seul et même temps. En raisonnant ainsi M. Bergson prend le principe fondamental de la relativité dans un sens ultra-relativiste, nous semble-t-il, dans son abstraction pure, en lui conférant une portée philosophique absolue.

Mais objecterions-nous, c'est l'aspect des phénomènes physiques qui reste le même et l'écoulement pur d'un temps n'est pas un phénomène physique, à moins qu'il ne se confonde avec le mouvement d'une horloge prise d'ailleurs dans sa conception la plus générale. Les temps pris à l'état pur dans l'un et l'autre système, ne revêtent aucune forme et se comportent mathématiquement comme de simples variables indépendantes. D'ailleurs, que signifie « un seul et même temps » M. Bergson le remarque lui-même lorsqu'il ajoute: « or, il est généralement difficile au philosophe d'affirmer avec certitude que deux personnes vivent le même rythme de durée. Il ne saurait même donner à cette affirmation un sens rigoureux et précis. »

M. Bergson ne paraît donc confirmer l'hypothèse d'un temps universel que d'une manière idéale et abstraite, en donnant au principe de relativité un sens absolu et métaphysique.

M. Bergson semble d'ailleurs accorder à la fin de son étude qu'il n'y a pas physiquement ou mathématiquement d'échappatoire aux formules de Lorentz.

Ce petit livre, d'un style alerte et vif, fourmille de remarques fines, suggestives et profondes. L'auteur voit en Einstein le véritable successeur de Descartes et dans la relativité généralisée l'aboutissement de la conception cartésienne de la physique; rien ne semble plus juste aujourd'hui.

Rolin WAVRE (Genève).

L. BIEBERBACH. — **Lehrbuch der Funktionentheorie.** Band I : *Elemente der Funktionentheorie.* — 1 vol. de IV-314 pages; broché 18 fr. 70; relié 21 fr. 35; B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.

Ce qui frappe dans les ouvrages didactiques de M. Bieberbach, et il en a publié plusieurs, c'est le souci constant de la précision et de la rigueur la plus parfaite et, chose assez rare, une grande clarté dans l'exposition des théories les plus subtiles. M. Bieberbach a su éviter l'écueil d'un formalisme étroit et sec, qui fait le désespoir des débutants. Chaque fois qu'un raisonnement court le risque de devenir trop abstrait, l'image vient à l'appui de la démonstration, et l'on comprend que cet appel à l'intuition est légitime, puisqu'il ne s'agit au fond que d'un langage plus commode et qu'il est toujours facile d'en donner l'équivalent analytique.

Ce premier volume est consacré à la partie classique de la théorie des fonctions analytiques: représentation conforme, intégrale de Cauchy, prolongement analytique, fonctions algébriques et leurs intégrales, un aperçu de la théorie des fonctions elliptiques, les théorèmes classiques de Weierstrass et de Mittag-Leffler et une étude fort intéressante de la fonction $\Gamma(z)$.

Mais ce qui distingue ce volume de quelques ouvrages similaires, c'est que l'auteur y a tenu compte, dans une mesure plus large qu'on ne le fait habituellement, des travaux des mathématiciens contemporains. En parlant par exemple des séries à termes complexes, il indique, sans la démontrer il est vrai, une très belle propriété de ces séries découverte par M. Steinitz en 1913 et qui est l'analogue d'un théorème classique de Riemann. De même dans les paragraphes consacrés aux séries à termes variables, et en particulier aux séries entières, il fait connaître quelques généralisations relativement peu connues du théorême d'Abel sur la limite vers laquelle tend la somme d'une série entière lorsqu'on se rapproche d'un point du cercle de convergence; il compte du reste reprendre l'étude de ce problème, qui a fait l'objet de recherches importantes, dans le second volume de son ouvrage.

Dans un autre chapitre il donne une démonstration très élégante du théorème fondamental de Cauchy-Goursat que l'on doit à M. Pringsheim. Très intéressantes sont aussi ses remarques à propos de la formule fondamentale de Cauchy, dont les démonstrations, qu'il critique, ne sont pas toujours, en effet, à l'abri de tout reproche.

Mais l'un des chapitres les plus curieux, à notre avis, est celui qui est consacré à la théorie du prolongement analytique. Après avoir défini la notion très délicate de fonction analytique d'après Weierstrass, qui souvent arrête les débutants, il établit le beau théorème de Poincaré-Volterra et arrive à la conception de Riemann qui complète celle de Weierstrass et qui lui permet de préciser la notion délicate aussi de points singuliers, à laquelle il avait déjà consacré des remarques importantes dans son article « Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen » (Enc. der math. Wiss., 1921).

En lisant ce chapitre, il apparaît nettement combien il est utile, dans

l'étude de ce problème, de rapprocher les points de vue de Riemann et de Weierstrass. La même remarque s'applique du reste à bien des problèmes de la théorie des fonctions. Les théories de Cauchy, de Riemann et de Weierstrass se rejoignent les unes les autres, se pénètrent et se complètent et il nous semble, en effet, qu'on a tort, comme le fait remarquer avec raison M. Bieberbach dans la préface à son ouvrage, de les traiter dans des chapitres séparés.

C'est à des théories plus récentes, dont une grande partie se rattachent aux belles recherches de Poincaré, de M. Picard et de M. Hadamard, que sera consacré le second volume du traité de M. Bieberbach. La plupart de ces travaux ont déjà été exposés dans les monographies sur la théorie des fonctions publiées sous la direction de M. Borel et dans le petit volume de M. Landau « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie ». Il reste à coordonner et à classifier ces résultats, à y mettre de l'ordre et de l'unité, ce qui n'est pas chose facile, car le champ est très vaste, mais la tâche que M. Bieberbach s'est imposée sera grandement facilitée par ses travaux antérieurs.

L'excellent ouvrage de M. Bieberbach est avant tout destiné aux étudiants, mais il pourra servir de guide à tous ceux qui désirent se mettre au courant de la théorie moderne des fonctions analytiques.

D. Mirimanoff (Genève).

E. Goursat. — **Leçons sur le Problème de Pfaff.** — 1 vol. gr. in-8° de VIII-388 pages; 30 francs; J. Hermann, Paris, 1922.

La publication de ces Leçons tombe admirablement à une époque où se développe un Calcul tensoriel qui, à beaucoup d'égards, prend modèle sur l'analyse des formes de Pfaff. Quant au problème pfaffien lui-même, il est toujours posé comme son créateur l'a posé. Il s'agit d'abord de l'étude de la forme

$$\omega = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n \,.$$

L'équation $\omega = 0$ définit une variété à $n-1$ dimensions si de certaines conditions d'intégrabilité sont satisfaites. Sans conditions, on peut toujours la réaliser sur une variété à une dimension c'est-à-dire sur une courbe. Or, entre les deux cas, il doit y avoir manifestement des cas intermédiaires avec variétés intégrales à $n - r$ dimensions. Ceci conduit à rechercher d'abord, pour ω, des *formes canoniques* que Pfaff envisageait déjà au travers d'intégrations successives et compliquées mais que des travaux modernes (notamment ceux de Gaston Darboux, de MM. Goursat et Cartan) rendent d'une considération beaucoup plus aisée.

Si l'on cherche à attacher à ω des variétés à deux dimensions, on est immédiatement conduit au *covariant bilinéaire* ω' de ω dont les coefficients

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

satisfont aux identités

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} = 0 \,.$$

Nous sommes à un petit pas des équations de l'Electromagnétisme; d'ailleurs le calcul des variations et la Géométrie donnent plusieurs interprétations de ω'. Les a_{ik} permettent de construire quatre systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 d'équations pfaffiennes; c'est surtout le fait, pour ces systèmes, de se composer d'équations non distinctes qui entraîne des réductions de structure pour ω. Telle est la substance essentielle du Chapitre I.

Le Chapitre II se rapporte à l'intégration d'une équation $\omega = 0$. Qui est seulement habitué aux méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre reconnaît sans peine qu'il y a là une extension de ces méthodes. Le langage est le même: systèmes caractéristiques, intégrales lieux de caractéristiques, etc..... D'ailleurs l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z : p_2, \ldots, p_n)$$

revient évidemment à

$$\omega = f dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - dz = 0 .$$

Avec le Chapitre III nous arrivons aux formes symboliques de différentielles. Cette expression, consacrée par l'usage, pourrait cependant prêter à l'erreur pour qui n'aurait pas encore abordé ces captivantes théories. Les nouvelles formes dont il s'agit sont naturellement à leur place sous les intégrales multiples, alors que, dans le même ordre d'idées, la forme ω ci-dessus pourrait être placée sous une intégrale simple. Elles ne sont pas moins tangibles que ω, mais elles obéissent à des règles de calcul à symbolisme vectoriel. Les produits $dx_1\ dx_2$... n'admettent point la duplication des facteurs et changent de signe quand on intervertit deux facteurs consécutifs. C'est ce que M. Goursat a excellemment expliqué sur d'ordinaires intégrales doubles.

On pressent maintenant comment vont s'orienter les recherches. On étudiera les réductions canoniques des différentielles d'ordre supérieur qui viennent d'être introduites.

L'extrême intérêt de la chose, le principal même est que la théorie établie pour la forme linéaire ω s'étend aisément, élégamment, à tous les ordres. Les formules les plus pratiques qui apparaissent alors sont vraisemblablement celles qu'on peut dire du type *stokien*. Une intégrale multiple porte sur une certaine forme et est égale à une intégrale d'ordre supérieur d'une unité, à champ d'intégration déformable, cette dernière intégrale portant sur la *dérivée* de la forme primitive. C'est sans doute ici qu'apparaît, de la manière la plus visible, ce contact avec le Calcul tensoriel que M. Goursat signale lui-même. Nous ne sommes plus maintenant tout près des équations de l'Electromagnétisme; nous y sommes ! Ce sont les équations (54) de la page 151 [1].

Le Chapitre IV traite de l'application des formes symboliques au problème de Pfaff; il s'agit, bien entendu, du problème de Pfaff tel qu'il a été posé au début pour la forme linéaire ω. Le symbolisme du chapitre précédent n'a étudié des formes différentielles, à de certains points de vue plus com-

---

[1] Th. De Donder. *Champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et champ gravifique d'Einstein*, 1920. *Gravifique einsteinienne*, 1921. Paris, Gauthier-Villars.

A. Buhl. *Electromagnétisme et Gravifique* (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1920).

plexes, que pour qu'on puisse maintenant les adjoindre à ω et définir notamment des *formes dérivées*, d'ordres divers pour ω. En prenant successivement ces dérivées on finit toujours par en rencontrer une qui est identiquement nulle et c'est sans doute là la manière la plus claire de concevoir la *classe* ou la forme canonique de ω.

On montre alors, très élégamment, que la dernière dérivée non nulle permet d'écrire immédiatement un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, dit *système adjoint* Σ_1, dont les intégrales sont précisément les variables canoniques de la forme réduite. Un système Σ_2 construit de même à partir de l'avant dernière dérivée est identique au système S_3 du chapitre I. De là, on peut redescendre vers l'intégration de systèmes arbitrairement donnés d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et, dans le même ordre d'idées, vers la construction des transformations de contact.

Le Chapitre V expose la théorie des invariants intégraux, en partant des définitions de Poincaré. Il importe maintenant d'être bref; nous dirons donc simplement que M. Goursat a traité de ces invariants dans leurs rapports très intimes avec les différentielles symboliques, les intégrales premières et la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Le Chapitre VI nous conduit aux systèmes formés de plusieurs équations de Pfaff. Ici la difficulté croît considérablement; elle est analogue ou, pour mieux dire, elle généralise la difficulté de passer d'équations aux dérivées partielles du premier ordre aux équations d'ordre supérieur. Inversement les équations d'ordre supérieur peuvent être traduites par des systèmes pfaffiens.

Dans le chapitre VII, consacré aux systèmes dérivés et au problème de Monge, l'intervention de dérivées partielles du second ordre se précise en des questions telles que celle des transformations de contact *prolongées*. Il s'agit d'équations de transformation qui contiennent non seulement des x, y, z, p, q, cas où elles seraient des transformations de contact ordinaires, mais aussi des r, s, t. Ce prolongement dépend de conditions d'intégrabilité de certains systèmes pfaffiens. Il y a là des choses impossibles à décrire brièvement mais dont l'intérêt est d'autant moins niable qu'elles semblent appeler de nouvelles et profondes recherches.

Le problème de Monge généralise l'équation $\omega = 0$ en remplaçant ω par une forme différentielle homogène mais non linéaire par rapport aux dx. Il dépend, lui aussi, d'un système pfaffien spécial.

Enfin le chapitre VIII termine l'ouvrage par les multiplicités intégrales et le genre d'un système de Pfaff. Ici sont condensés les théorèmes d'existence analogues à ceux qui concernent les équations aux dérivées partielles. On y trouve des nombres entiers qui caractérisent les systèmes différents, ou mieux encore le degré d'arbitraire des solutions possibles. Ces recherches, de plus en plus élevées, mènent aux travaux de M. Ch. Riquier. Elles sont, en très grande partie, l'œuvre de M. E. Cartan; elles touchent à l'analysis situs, aux difficultueuses questions de déformation dans les hyperespaces non-euclidiens. Et comme les noms de MM. Riquier et Cartan ne vont évidemment point sans être précédés de celui de M. E. Goursat lui-même, il n'est pas inutile de souligner, comme je l'ai fait en maints autres endroits, que la France ne manque point de savants créateurs pour lesquels la très belle analyse des théories einsteiniennes n'a jamais eu de secrets.

A. Buhl (Toulouse).

G. JUVET. — **Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu**. Préface de M. Jacques HADAMARD. — 1 vol. in-8°, 100 p.; 12 fr.; Librairie scientifique Albert Blanchard, place de la Sorbonne, Paris 1922.

Un phénomène physique est le siège d'actions qui se transmettent par contact suivant des lois déterminées. Mais nous ne pouvons formuler ces lois qu'en faisant choix d'un système de coordonnées, car elles expriment des relations entre grandeurs résultant de mesures faites sur le phénomène. Ces lois revêtent dans le système que l'on a choisi une forme particulière. Dans tout autre système de repérage, elles revêtiraient une forme différente, elles apparaîtraient sous un autre aspect.

Or le principe fondamental de relativité formulé par Einstein est le suivant :

Les lois de la physique doivent être valables dans un système de référence absolument quelconque.

En d'autres termes, une loi physique n'a pas de signification absolue lorsqu'elle n'est exprimable que dans un système de référence particulier, parce qu'elle est entachée de ce qu'il y a de subjectif dans cette manière spéciale de regarder le phénomène. Si la loi correspond à une réalité physique, on doit pouvoir la formuler indépendamment d'un choix particulier du système de référence. Nous ne pouvons pas, toutefois, nous débarrasser complètement du système de repérage et faire de la physique exactement comme les Grecs faisaient de la géométrie, d'une manière intrinsèque. Il nous faut pour un instant au moins un système de mesure particulier. Que se passe-t-il lorsque l'on change de système de coordonnées. Les éléments qui entraient dans l'expression de la loi changent de valeur. Alors de deux choses l'une : ou bien la relation qui lie les nouveaux éléments dans les nouvelles coordonnées est de même forme que celle qui lie les anciens éléments dans les anciennes coordonnées, ou bien il n'en est rien.

Dans le premier cas, la loi sera « covariante » vis-à-vis d'une transformation de coordonnées et le principe de relativité revient à affirmer que les lois de la physique doivent revêtir une forme covariante.

En d'autres termes, l'expression d'une loi physique se transforme lorsqu'on change de système de référence mais elle doit se transformer suivant un mode déterminé.

Dès lors, les relativistes étaient en droit de demander aux mathématiciens de former le thème d'un calcul qui permît, étant donnée l'expression d'une loi dans un système particulier, d'exprimer immédiatement cette loi dans un système quelconque et de dégager *a priori* les caractères de covariance.

Grâce aux travaux de Riemann, Christoffel, Ricci et Levi-Civita, les géomètres étaient en possession de ce nouveau calcul, bien avant qu'Einstein en montra la portée physique. C'est le calcul tensoriel.

Un tenseur est un ensemble de quantités (ses composantes) données dans un système de référence et qui se transforme lorsqu'on passe de ce système à un autre, suivant un mode déterminé, au moyen des relations qui expriment les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes. Transporté sur le terrain de la géométrie infinitésimale, qui est aussi celui des actions par contact en physique, le calcul tensoriel devient le calcul différentiel absolu. Les expressions des nouvelles composantes d'un tenseur étaient linéaires et homogènes en fonction des anciennes, si ces composantes sont nulles dans un système, elles sont nulles dans tous les autres. L'annu-

lation d'un tenseur, c'est-à-dire de ses composantes, sera donc propre à représenter une loi physique conformément au principe de relativité. Il en est de même d'une égalité entre deux tenseurs.

On peut dire que le calcul différentiel absolu fut un instrument d'une vertu presque magique pour dégager et formuler les lois conformes au principe de relativité. Je n'ai donc pas besoin d'insister sur l'importance de cette introduction au calcul tensoriel, où M. G. Juvet, s'adressant spécialement au débutant, a réussi à donner d'une manière très simple et très claire les principes fondamentaux du maniement de cette nouvelle algèbre, en ne négligeant pas de développer, pour ceux auxquels le nouvel algorithme, pourrait paraître trop formel, quelques applications simples à la géométrie élémentaire.

On trouvera dans cette introduction les principes du calcul vectoriel et de l'algèbre tensorielle, puis la géométrie d'une multiplicité quelconque attachée à la forme métrique de Riemann. Il faut faire mention spéciale de la question du déplacement parallèle d'après M. Levi-Civita, qui immerge la multiplicité dans un espace euclidien à un nombre suffisant de dimensions. Cette manière d'envisager le déplacement se trouve dans un mémoire du *Circolo matematico* de l'année 1917, mais elle n'est pas traitée dans les ouvrages de MM. Eddington, Weyl, Marcolongo, ou Becquerel, dont nous avons déjà fait l'analyse pour cette Revue.

L'introduction de M. Juvet contient aussi une ample bibliographie du calcul tensoriel.

Rolin WAVRE (Genève).

Beppo LEVI. — **Abbaco da 1 a 20**. Illustrazioni di Ellebi. — 1 vol. in-8°, de 60 p. ; 3 l. 50 ; B. Levi, editore ; Parma, 1922.

Ceci est sans doute l'ouvrage mathématique le plus élémentaire que nous ayons jamais analysé. C'est le premier livre d'arithmétique à mettre entre les mains d'un enfant ; il rappelle, par l'aspect, les plus jolis et artistiques alphabets illustrés. Il est destiné à enseigner non les rudiments de la lecture, mais ceux de la science des nombres.

Avec l'aide d'un excellent dessinateur, l'auteur a fort joliment groupé des bambins, des animaux, des fleurs, des fruits, etc., et c'est à ces groupes d'êtres ou d'objets qu'il fait correspondre les nombres entiers. Il définit ceux-ci par l'adjonction de l'unité à l'entier précédent, et ce, toujours par de jolies images.

Il développe la notion d'addition, puis celle des trois autres opérations fondamentales, mais sans jamais faire intervenir de nombres supérieurs à 20. Il insiste beaucoup sur l'idée de *moitié*, idée typique et aussi simple que possible pour la division. Lina et Charlot font de profondes réflexions pour se partager 9 figues ; on peut, à la rigueur, en couper une en deux. Mais si le jardinier voulait mettre 17 plantes sur deux rangs ? Profond mystère ! Il y a donc des nombres qu'on ne peut diviser ? C'est charmant et le dessinateur est toujours un collaborateur précieux.

Après ces pages enfantines, l'auteur en a mis quelques autres destinées aux parents et contenant des conseils qui rappellent assez que c'est un mathématicien de valeur qui a voulu se mettre à la portée des petits.

Voilà une œuvre italienne digne d'être imitée en toutes les langues.

A. BUHL (Toulouse).

Paul LÉVY. — **Leçon d'analyse fonctionnelle**, professées au Collège de France (collection de monographie sur la théorie des fonctions). Préface de M. J.-H. HADAMARD. — 1 vol. in-8°, VI + 442 p.; 35 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922.

Au début de ce siècle, les analystes fondaient une grande espérance sur la notion de fonction de ligne, introduite dans la science par M. Volterra et sur ses développements qui constituent le calcul fonctionnel. Il semblait que de cette notion on pût dégager, un jour, le plus puissant instrument de l'analyse.

Malgré cela, aujourd'hui encore, ceux qui ont fait du calcul fonctionnel leur spécialité sont très peu nombreux. M. Paul Lévy fut presque seul à tenir le flambeau, ces dernières années, en développant l'analyse fonctionnelle pour elle-même et dans le sens d'une généralisation du calcul infinitésimal. Nous ne saurions faire la part assez grande aussi à l'école de M. Fréchet, mais elle est dirigée plus spécialement vers la partie abstraite de cette nouvelle discipline. Mentionnons aussi M. Gateaux, mort à la guerre en septembre 1914, à qui l'on doit quelques-unes des notions les plus profondes et les plus originales.

Si l'on a pu comparer le calcul fonctionnel à la montagne qui accouche d'une souris, nous estimons que le livre si riche d'idées fécondes et suggestives en même temps que de résultats cristallisés et désormais classiques, que M. Paul Lévy publie aujourd'hui, contribuera à augmenter l'intérêt que l'on porte à ces questions et fera peut-être renaître, plus éprouvée, la grande espérance d'autrefois.

Il faut distinguer deux domaines dans le calcul fonctionnel.

Une fonction de lignes est un nombre dont la valeur dépend de toutes les valeurs d'une fonction appelée argument, ce nombre variant en général lorsqu'on fait varier l'argument. L'exemple le plus simple de fonction de ligne, ou de fonctionnelle est l'intégrale définie.

Dans l'étude des fonctions de points $f(x)$, on néglige habituellement l'étude du champ de variabilité de la variable indépendante, car dans les cas ordinaires, celui-ci se réduit à un intervalle et il n'y a rien de plus simple. Mais, lorsqu'il s'agit d'une fonction de lignes, les choses se présentent différemment et le premier domaine qui est ouvert au calcul fonctionnel est l'étude des ensembles de fonctions ou de lignes et des caractères de continuité ou de discontinuité de la fonctionnelle définie sur ces ensembles.

Cette étude a été entreprise par MM. Arzela, Hilbert, Montel et surtout, d'un point de vue plus systématique et abstrait par M. Frechet. M. Tonelli a réuni les propriétés essentielles de ces ensembles dans son livre *Fundamenti del calcolo delle variazioni* dont nous avons dit un mot dans une notice précédente.

Le second domaine est l'extension aux fonctionnelles des notions de dérivation, d'équation différentielle et, après elles, de tout le calcul infinitésimal.

D'importants résultats ont été obtenus dans cette voie.

M. Hadamard, dans ses *Leçons sur le calcul des variations*, M. Volterra dans ses *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm*, puis dans deux monographies de la collection Borel *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* et *Leçons sur les fonctions de ligne;* M. Paul Lévy, lui-même, dans sa thèse et dans différents mémoires parus dans les

Rendiconti del circolo matematico di Palermo avaient déjà introduit la notion de dérivée fonctionnelle et d'équations aux dérivées fonctionnelles qui généralise la notion d'équation différentielle. Ces différents auteurs ont spécialement approfondi les questions d'analyse fonctionnelle en rapport avec des problèmes classiques de physique mathématique.

C'est ce second domaine qu'explore le jeune professeur de l'Ecole polytechnique de Paris dans ses leçons d'analyse fonctionnelle et cela par intérêt purement analytique.

Dans ce vaste champ, M. Volterra et M. Hadamard ont cueilli quelques fleurs d'un remarquable éclat; l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles, à laquelle conduit le problème de Dirichlet, l'expression de la variation de la fonction de Green et l'équation d'Hadamard, la représentation d'une fonctionnelle linéaire par une limite d'intégrale, constituent des résultats, on ne peut plus élégants, propres à encourager les chercheurs.

Le livre actuel contient une foule de questions nouvelles. M. Paul Lévy a plus d'une fois proclamé que tout chapitre de l'analyse a sa généralisation dans le calcul fonctionnel. Ce sont quelques-unes de ces généralisations qu'il a développées.

Il s'est donc placé sur un terrain plus général, parfois entièrement nouveau, et a procédé d'une manière plus systématique que M. Volterra en particulier.

Un exposé complet de l'analyse fonctionnelle devrait contenir la théorie des fonctions à une infinité de variables, des formes quadratiques à une infinité de dimensions et des équations intégrales, ainsi que tout le calcul des variations. Mais ce sont là des enfants émancipés et pour ainsi dire détronqués. M. Lévy a dû se restreindre à ce qui procède de l'idée de fonction de ligne dans ce qu'elle a de plus pur.

Il étudie différentes formes de continuité d'une fonctionnelle, puis les représentations générales d'une fonctionnelle continue, qui généralisent le développement en série de polynomes données par MM. Hadamard, Frechet et Riesz.

Puis il aborde l'étude de la dérivation d'une fonctionnelle et de l'intégration de différents types d'équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre et parvient à la généralisation des notions d'intégrale complète, de caractéristique et de la méthode d'intégration de Cauchy.

M. Lévy avait déjà introduit dans sa thèse (1910) la notion d'équation complètement intégrale qui jette une vive lumière sur ces questions difficiles.

Mentionnons en passant une généralisation des équations de Jacobi-Hamilton dont s'était occupé déjà M. Prange.

Enfin, plusieurs chapitres sont consacrés à l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles partielles du second ordre, d'une équation généralisant celle de Laplace et des fonctionnelles harmoniques. Cette étude introduit une formule qui généralise celle de Green et nécessite la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel, laquelle, comme l'a montré Gateaux, doit se ramener à celle de moyenne. Comme le fait remarquer l'auteur, tandis que, jusqu'ici, l'analyse fonctionnelle présentait avec l'analyse ordinaire une analogie remarquable, la théorie de la moyenne en calcul fonctionnel est quelque chose d'essentiellement nouveau.

L'étude de ce livre exige des connaissances très étendues.

M. Lévy a, autant que possible, rappelé sommairement les notions qui

sont indispensables pour épargner le temps des lecteurs qui pénétreraient dans ce vaste champ pour la première fois ; notamment les notions d'intégrales de Lebesgue et de Stieltjes.

L'analyse fonctionnelle est en plein défrichage. M. Lévy à qui l'on doit, avec M. Gateaux, les principaux résultats et les idées les plus suggestives et les plus profondes dans ce domaine, laisse de nombreuses questions inachevées. Il y a là matière à des recherches qui pourraient être très fructueuses. Ceux qui s'y sont spécialisés sont rares. Mais nous croyons que la publication de ce livre, impatiemment attendue, engagera quelques jeunes mathématiciens à suivre cette voie, en même temps qu'elle facilitera et systématisera leurs recherches. Rolin WAVRE (Genève).

Ch.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN. — **Cours d'analyse infinitésimale.** — Quatrième édition; 2 vol. in-8°. Tome I, IX + 434 p., 1921; tome II, XII + 478 p., 1922; A. Uystpruyst-Dieudonné, Louvain; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Il serait superflu de rappeler l'importance et l'utilité, pour ceux qui étudient ou enseignent le calcul infinitésimal, du cours d'analyse de l'éminent mathématicien belge. La troisième édition, presque achevée, a disparu dans les flammes à Louvain en août 1914. Elle contenait une contribution personnelle étendue à la théorie des ensembles et de l'intégrale de Lebesgue. Depuis lors, M. de la Vallée-Poussin a publié ses recherches sur ce sujet dans son ouvrage : « Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire » (Paris, Gauthier-Villars, 1916). Ces questions, ainsi que celles traitées en petit texte dans l'ancienne édition, ne figurent plus dans la nouvelle. Souhaitons qu'elles puissent prendre place, avec d'autres, comme l'auteur l'espère dans un troisième volume de la présente édition.

Un progrès essentiel, réalisé en mathématique pure durant ces dernières années, a consisté à réduire au minimum les suppositions que l'on doit faire sur un être mathématique, pour pouvoir lui attribuer telle propriété, qu'on lui reconnaît dans un cas particulier. S'il est plus simple de faire dans une démonstration quelques hypothèses surabondantes, sur l'être que l'on étudie, pour énoncer une proposition, il est, par contre, plus logique de réduire ces hypothèses autant que possible, pour atteindre à un plus haut degré de généralité. Une telle méthode, avare d'hypothèses, montre, en plus, la charpente d'une théorie, la manière dont les propositions s'emboîtent les unes dans les autres. Cette préoccupation se retrouve dans de nombreux chapitres de ce cours, notamment, au début, dans l'étude des fonctions continues, des conditions de dérivation et de différentiation des fonctions explicitement ou implicitement définies. C'est ainsi, par exemple, que l'auteur donne le théorème d'existence des fonctions implicites sous la forme générale de M. Young. Au même point de vue, les théorèmes d'existence des équations différentielles et les propriétés des intégrales envisagées dans un système donné, et comme fonctions des valeurs initiales ou de certains paramètres sont traités avec plus de soin qu'on ne le fait d'ordinaire. Si M. de la Vallée-Poussin n'a pas abordé, dans ce cours, l'étude des fonctions analytiques, des travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass, c'est au bénéfice d'une étude plus détaillée et plus minutieuse du domaine réel. Mentionnons, sans avoir la prétention d'être complet dans notre analyse, certains chapitres dont l'étude est spécialement approfondie.

Les intégrales eulériennes, exposées déjà dans la première édition, sont reprises ici d'une façon détaillée : nombres de Bernoulli, fonctions B et Γ, formule de Legendre, produit d'Euler, intégrale de Raabe, expression des eulériennes en produit infini et représentation asymptotique.

L'auteur nous avise modestement dans sa préface, que l'on reconnaîtra sans peine dans ce chapitre l'empreinte de l'enseignement d'Hermite.

Dans un nombre de pages équivalent, une trentaine environ, l'auteur donne un exposé qui nous paraît assez étendu des propriétés que l'on peut énoncer relativement aux séries de Fourier et aux séries trigonométriques, sans faire intervenir la notion d'intégrale de Lebesgue. Mentionnons : le théorème de Riemann en vertu duquel la manière dont se comporte la série de Fourier au point x ne dépend que des valeurs de la fonction dans le voisinage du point x ; la condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier converge vers une limite déterminée ; les critères de convergence de la série vers la fonction qui lui a donné naissance, notamment ceux de Dini et de Jordan.

Puis un certain nombre de pages sont consacrées aux procédés de sommation des séries de Fourier, au théorème de Hardy-Landau, à l'étude des singularités des séries de Fourier, puis à l'étude des séries trigonométriques quelconques dans laquelle, comme on sait, la dérivée seconde généralisée de Riemann et un théorème de Schwarz jouent un rôle essentiel et permettent d'arriver au théorème de l'unicité du développement.

Mentionnons, en passant, une introduction très courte, mais très suggestive au calcul des différences finies. Les applications géométriques n'ont point été négligées. En particulier, l'étude des lignes tracées sur une surface y occupe une soixantaine de pages et les lignes géodésiques à elles seules une vingtaine. On sait l'importance de cette dernière notion, ainsi que celle de courbure dans la mécanique relativiste. Ceux auxquels l'étude de la multiplicité riemannienne à quatre dimensions paraîtrait trop formelle trouveront dans ces quelques pages et sans avoir besoin de consulter les leçons de Darboux, une étude détaillée de ces notions, attachées à la forme métrique de Riemann, pour une multiplicité visible et tangible à deux dimensions. Mentionnons les notions de courbure et de torsion géodésique ; invariance de la courbure géodésique relativement à une déformation de la surface ; équation différentielle des géodésiques en coordonnées quelconques ; étude des lignes géodésiques infiniment voisines, condition pour qu'elles ne se coupent pas ; unicité d'une géodésique passant par deux points sur une surface à courbure négative ; expression de la longueur d'une géodésique, condition pour qu'elle jouisse de la propriété connue de minimum et enfin, coordonnées polaires géodésiques.

Je suspends ici cette analyse. Qu'il me suffise d'avoir montré que, pour le domaine réel, le cours de M. de la Vallée-Poussin est sur de nombreux points, plus détaillé que ceux de MM. Jordan, Picard ou Goursat, auxquels on sera souvent tenté de le comparer.

Il faudrait une analyse plus approfondie pour dégager l'apport personnel de l'auteur aux matières qui y sont abordées. Cet apport est certainement très important.

R. Wavre (Genève).