Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante

par Marcel WINANTS (Liège).

I. — En analyse élémentaire, on étudie les fonctions d'une *variable réelle*. On fait correspondre aux diverses valeurs de celle-ci les différents points d'une droite ou d'un segment de droite. On connaît des fonctions périodiques de cette variable, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait:

$$f(x + m\mathrm{T}) = f(x) ,$$

quelle que soit la valeur de x ; T représente une constante bien déterminée — c'est la période — tandis que m est un entier complètement arbitraire: négatif, nul ou positif. Les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions circulaires.

Et l'on a démontré l'impossibilité d'une fonction doublement périodique.

II. — Aux différents points d'une surface plane on peut faire correspondre les diverses valeurs d'une *variable complexe*. L'expression $z = x + i$ y est appelée *une* variable (une, au singulier). L'analyse des variables complexes a pris un développement tel que l'on en peut considérer l'analyse réelle comme un cas très particulier.

On connaît des fonctions doublement périodiques d'une seule variable complexe ; ce sont des fonctions satisfaisant l'égalité

$$f(z + m\mathrm{T} + m'\mathrm{T}') = f(z) ,$$

quelle que soit la valeur de z ; T et T′ sont les deux périodes, et l'on a démontré que leur rapport était nécessairement complexe ; m et m' sont des entiers arbitraires.

Les fonctions elliptiques sont les plus simples parmi les fonctions doublement périodiques d'une seule variable indépendante.

Un très original théorème de Jacobi démontre l'impossibilité d'une fonction uniforme triplement périodique d'une seule variable complexe.

III. — Nous allons développer des considérations analogues pour l'espace à trois dimensions, et nous montrerons enfin comment la science cristallographique semble justifier tous ces développements.

Soient trois axes coordonnés rectangulaires. Envisageons trois vecteurs non coplanaires a, b, c, issus de l'origine.

Considérons le parallélépipède dont les huit sommets correspondent aux vecteurs:

$$\left.\begin{array}{l} 0\,,\ a+b+c\,, \\ a\,,\ b\,,\ c\,, \\ b+c\,,\ c+a\,,\ a+b\,. \end{array}\right\}\ (\mathrm{P})\ .$$

A l'intérieur de son volume, prenons un point quelconque, et soit u le vecteur joignant ce point à l'origine. Choisissons u comme variable indépendante.

Par un procédé quelconque, à toute valeur de u faisons correspondre un vecteur v ; nous aurons:

$$v = f(u)\ ;$$

posons ensuite:

$$f(u + ma + m'b + m''c) = f(u)\ .$$

Et nous aurons ainsi défini une *fonction triplement périodique* d'une seule variable indépendante.

Des fonctions de cette nature ont peut-être déjà été envisagées, notamment en analyse vectorielle ? Nous nous bornerons pour le moment à soulever la question et nous serions heureux si quelque lecteur de l'*Ens. math.* pouvait nous renseigner sur ce point.

IV. — Les cristallographes donnent au volume P le nom de parallèloèdre. Ce parallèloèdre est empli de matière et d'éther. On conçoit un cristal comme formé d'un nombre prodigieusement grand de parallèloèdres identiques, juxtaposés.

Toute propriété, physique ou chimique, en un point d'un cristal, est donc une fonction triplement périodique de la position de ce point. Cette fonction est actuellement réelle, mais ce n'est là qu'un cas particulier.

La triple périodicité d'une structure cristalline est un fait qu'aucun cristallographe ne conteste plus. Elle pourrait, et même devrait suggérer au mathématicien l'étude systématique des fonctions à trois périodes. Cette étude nous paraît fort difficile, d'autant plus que nous ne connaissons encore aucune analyse à trois dimensions, pouvant être considérée comme une généralisation de l'analyse complexe. On ne soutiendra certainement pas que la théorie des quantités complexes rentre dans celle des quaternions comme un cas particulier dans un cas général.

Néanmoins, nous croyons qu'aujourd'hui l'on peut ne plus mettre en doute l'existence des fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante.

LIÈGE (Université), le 31 mars 1923.

Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

I. — *Réponse à une Note de M. Mar. Bedarida*

par M. Léon AUBRY.

Dans sa note (*Enseignement mathématique*, 22me année, 1921 et 1922, nos 1-2, pp. 51-52), M. BEDARIDA affirme que les considérations sur lesquelles je me suis basé, ne sont pas justes, mais il ne donne aucun argument décisif contre mes objections; voici quelques explications pour bien montrer que je n'ai pas du tout envisagé la valeur $s = 1$.

Dans le *Journal de Liouville* (Tome 4, 1839, p. 396), DIRICHLET a voulu établir, pour $s > 1$, l'égalité

$$\prod \frac{1}{1 - \omega^{\gamma} \frac{1}{q^s}} = \sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n^s} = \mathrm{L} \qquad (1)$$

mais, en réalité, sa démonstration, basée sur la convergence de $\sum \frac{1}{h^s}$, n'est valable que pour les valeurs de s qui rendent cette somme convergente, elle n'est donc pas valable, à bien plus forte raison, pour les valeurs de $s \leqq 1$ qui rendent log. $\mathrm{L}_0 = \infty$, puisque par construction $\mathrm{L}_0 < \sum \frac{1}{h^s}$ et l'on ne peut donc avoir en même temps log. $\mathrm{L}_0 = \infty$ et l'égalité (1) démontrée, comme l'a admis DIRICHLET, (*loc. cit.*, p. 408 et 411).

M. BEDARIDA affirme que DIRICHLET a déduit par des raisonnements rigoureux l'équation de la page 411 (*loc. cit.*) où $s = 1 + \rho$, $\rho > 0$, or il faut remarquer que ρ n'est pas un nombre quelconque, mais nécessairement infiniment petit, puisque la démonstration de DIRICHLET est basée en grande partie sur des raisonnements d'analyse infinitésimale rigoureux seulement pour $s = 1 + \rho$ avec ρ infiniment petit et tendant vers 0; il y a donc là encore une contradiction, puisque ces raisonnements d'analyse ne sont absolument exacts que pour la limite $s = 1$, tandis que pour cette valeur de s, l'égalité (1) n'est pas démontrée par DIRICHLET.

II. — *Réponse à la lettre de M. Léon Aubry*

par M. Mar. BEDARIDA.

Dans la note ci-dessus qui nous a été obligeamment communiquée par la Rédaction, M. L. Aubry nous dit qu'il n'est pas persuadé de mes observations sur ses objections concernant la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

En supposant $\rho > 0$, Dirichlet arrive à l'égalité (*Journ. de Liouville*, t. 4, 1839, p. 411) :

$$\sum \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{p-1} \left[\log L_{(0)} + \Omega^{-\gamma_m} \log L_{(1)} + \Omega^{-2\gamma_m} \log L_{(2)} + \Omega^{-(p-1)\gamma_m} L_{(p-2)} \right]$$

qui a toujours une valeur déterminée et finie dans l'hypothèse $\rho > 0$.

Dans cette relation, Dirichlet passa à la limite pour $\rho = 0$ $(s = 1)$; dans le § II de son Mémoire il a démontré que $\lim\limits_{s=1} \log L_{(0)} = \infty$.

A présent, les considérations pour le passage à la limite pour $s = 1$ ne conduisent pas à devoir considérer l'égalité :

$$\prod \frac{1}{1 - \omega^{\gamma} \frac{1}{q^s}} = \sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n^s} = L \qquad (1)$$

pour $s = 1$. Dans la démonstration de Dirichlet, on ne demande pas d'examiner (1) pour $s = 1$, mais il y a seulement des considérations à la limite pour $s = 1$ $(\rho = 0)$.

M. Aubry ne doit pas oublier le principe fondamental de la théorie des limites fonctionnelles, c'est-à-dire que la limite (quand elle existe) est bien différente de la valeur (s'il y en a une) que prend la fonction lorsqu'on remplace la variable par la valeur pour laquelle on considère la limite.

J'ajouterai encore les observations suivantes, au sujet des réponses publiées dans le fasc. 5-6, p. 69-70, 1922, de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, à propos des remarques de M. Aubry sur la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

Les citations bibliographiques de ces réponses ne font pas comprendre si quelque mathématicien a prouvé que les raisonnements de Dirichlet ne seraient pas rigoureux, mais ils donnent seulement des indications d'auteurs qui ont simplifié la démonstration de Dirichlet et qui ont donné au théorème une plus vaste extension; en outre, on signale la nouvelle démonstration de M. Landau.

Quant au théorème indiqué dans la première réponse, je dis qu'il a été étendu, sans recourir à des considérations d'analyse, aux progressions $mx + 1$, où m est un entier quelconque (KRONECKER, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, p. 440-441).

Gênes, décembre 1922.

A.-M. BEDARIDA.