Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FAMILLES ADDITIVES ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

Autor: Fréchet, M.

Kapitel: I. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515731

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FAMILLES ADDITIVES
ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

PAR

M. FRÉCHET (Strasbourg).

SOMMAIRE:

Première partie. — I. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations. — II. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint. — III. Idem au sens complet.

Seconde partie. — IV. Fonctions additives d'ensembles abstraits [1].

I. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations.

L'addition, la soustraction de deux ensembles sont des exemples particuliers d'opérations qui font correspondre à certains ensembles ou groupements d'ensembles des ensembles déterminés. On peut dire qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *close par rapport aux opérations* S, D,... si chacune de ces opérations, effectuée uniquement sur des ensembles appartenant à la famille $\mathcal{F}$ ne peut fournir que des ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. On peut alors se proposer de construire une famille $\mathcal{F}$ close par rapport à certaines opérations S, D,... connaissant certains ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. Ou même, plus généralement, étant donnée une famille arbitraire $\mathcal{H}$ composée d'ensembles également arbitraires, on peut chercher s'il existe une famille $\mathcal{F}$ comprenant tous les ensembles de $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D,... Nous distinguerons deux cas qui ne sont pas

[1] Le présent article est le résumé de deux communications présentées en janvier 1922 au Colloque mathématique de Zurich et au Séminaire mathématique de Berne, par M. Maurice FRÉCHET, Directeur de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.

tous les cas possibles, mais qui sont les plus simples et les plus importants :

1° Supposons que les opérations S, D,... ne soient applicables (ou qu'on aie convenu de ne les appliquer) qu'à des groupements formés d'un nombre *fini* d'ensembles. Appelons suite déduite de la famille $\mathcal{H}$, toute suite ordonnée composée d'un nombre fini d'ensembles dont chacun, G, appartient à $\mathcal{H}$ ou résulte de l'une des opérations S, D,... effectuée sur les ensembles qui précèdent G dans cette suite.

Appelons maintenant $\mathcal{H}_r$ la famille constituée de tous les ensembles appartenant à l'une quelconque des suites déduites de $\mathcal{H}$; la famille $\mathcal{H}_r$ comprend évidemment la famille $\mathcal{H}$ et est close par rapport à S, D,...; d'autre part elle appartient à toute famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S,D,... Nous savons donc construire non seulement une solution du problème, mais même «la plus petite famille» comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D,...

2° Supposons que les opérations S, D, ... ne sont applicables (ou qu'on convienne de ne les appliquer) qu'à (un nombre fini ou) un groupement *dénombrable* d'ensembles. Alors on saura, comme précédemment, former « la plus petite famille » comprenant une famille arbitraire donnée $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... (On pourra l'appeler $\mathcal{H}_c$). On opèrera comme plus haut, mais cette fois les suites considérées pourront comprendre des suites *bien* ordonnées dénombrables, *(finies ou non)*.

Ainsi chaque ensemble appartenant à $\mathcal{H}_r$ (ou à $\mathcal{H}_c$) pourra être considéré comme le dernier terme d'une suite bien ordonnée finie (ou dénombrable) d'ensembles formés à partir des ensembles de la famille arbitraire donnée $\mathcal{H}$ par des applications répétées, mieux, réitérées, des opérations S,D, ... dans un ordre quelconque.

Distinction des classes d'ensembles. — On peut si l'on veut *repérer le degré de complexité* de la construction de chaque ensemble de $\mathcal{H}_r$ ou de $\mathcal{H}_c$ (qui d'ailleurs peut être obtenu parfois par différentes suites d'opérations) de la manière suivante.

Supposons qu'on puisse disposer les opérations S, D,..., considérées en elles-mêmes, en une suite bien ordonnée T. (C'est par

exemple ce qui aura lieu si ces opérations sont en nombre fini, seul cas utilisé par la suite). En permutant au besoin ces opérations, on peut appeler précisément S, D, ... ces opérations dans l'ordre où elles se présentent. Considérons alors la suite bien ordonnée T′, semblable à la suite T,

$$\mathcal{K}, \mathrm{S}\mathcal{K}, \mathrm{D}(\mathrm{S}\mathcal{K}), \ldots$$

où chaque terme est une famille $\mathcal{L}$ d'ensembles composée des ensembles appartenant aux familles précédentes et de ceux obtenus en appliquant à tout groupement de ceux-ci (quand cela est possible) l'opération de même rang que $\mathcal{L}$ dans T. Soit enfin $\mathrm{U}\mathcal{K}$ la famille des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes de cette suite T′. Il est évident que $\mathrm{U}\mathcal{K}$ comprend $\mathcal{K}$.

La plus petite famille $\mathcal{K}_c$ comprenant $\mathcal{K}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... comprend évidemment $\mathrm{U}\mathcal{K}$, si $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}_c$. De plus la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathcal{M}$ soit close par rapport à S, D, ... est que $\mathrm{U}\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Finalement $\mathcal{K}$ contiendra les familles qui sont les termes d'une suite bien ordonnée dénombrable σ, chacun, $\mathcal{N}$, résultant de l'opération U effectuée sur la famille constituée par les ensembles appartenant à l'un des termes de σ précédant $\mathcal{N}$.

Remarquons que si deux termes quelconques d'une des suites σ sont identiques, tous les termes de cette suite sont identiques à partir d'un certain rang. On peut donc remplacer dans ce qui précède, les suites σ par les suites σ_0 qui sont chacune formée en supprimant, s'il y a lieu, d'une suite σ_0 tous les termes identiques à un des termes le précédant.

Ceci étant, chaque suite σ_0 est une suite bien ordonnée dénombrable de familles distinctes, chacune comprenant les précédentes (et comprenant en particulier la première qui est toujours $\mathcal{K}$). Alors si deux suites bien ordonnées σ_0 sont distinctes, l'une est identique à un « segment » de l'autre, c'est-à-dire est formée des mêmes termes et dans le même ordre que la suite des termes de la seconde précédant un certain terme de cette seconde suite.

Ceci suffit pour établir — sans avoir à parler de nombres transfinis, — qu'il existe une suite bien ordonnée Σ formée de

familles distinctes construite comme les σ_0 (sauf qu'elle n'est pas assujettie à être dénombrable) et qui est telle que tous les σ_0 en sont des segments. Enfin les ensembles de tous les σ_0 forment une famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... Par suite, la plus petite famille $\mathcal{H}_c$ est formée des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes d'une certaine suite bien ordonnée Σ composée de familles distinctes dont chacune s'obtient en appliquant l'opération U à la famille composée des ensembles des familles précédentes. La décomposition précédente de $\mathcal{H}_c$ permet maintenant de classer les ensembles qui composent cette famille par ordre de complication croissante.

En effet, chacun de ces ensembles, E, appartient aux familles successives de Σ à partir d'un certain rang. C'est ce rang qui fixe le degré de complexité de la construction de E à partir de $\mathcal{H}$. Il faut d'ailleurs distinguer cette complexité de la complexité de l'ensemble E lui-même. Si la famille $\mathcal{H}$ est formée d'ensembles très compliqués, il pourra arriver qu'un ensemble E de classe très élevée soit beaucoup plus simple que les ensembles de H. Mais si au contraire les ensembles de $\mathcal{H}$ sont tous simples, on pourra juger légitimement de la complexité intrinsèque d'un ensemble E de $\mathcal{H}_c$ par le rang du terme de la suite Σ où il apparaît pour la première fois.

Nous remarquerons enfin que dans le cas où les opérations données, S, D, ... ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles, la suite Σ si elle n'est pas finie est formée d'une suite de familles de rangs finis, de sorte que dans ce cas les classes des ensembles de $\mathcal{H}_r$ déduits de $\mathcal{H}$ sont toutes repérables par des nombres entiers.

II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconque est dite *additive au sens restreint*, si E_1, E_2 étant deux quelconques des ensembles de la famille $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 + E_2$, $E_1 - E_2$ appartiennent aussi à la famille $\mathcal{F}$.