Chapitre IV. Deux surfaces ayant la symétrie d'une tourmaline.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Dans le n° 62, nous reprendrons et nous généraliserons plusieurs théorèmes démontrés précédemment. Leur évidence est maintenant si grande que tout nouvel essai de démonstration nous paraît superflu.

Nous tenons encore à faire observer que la méthode s'applique également bien à la géométrie plane et à la géométrie solide.

62. — Si une surface est rencontrée par un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux, chaque point d'intersection sera un point singulier ou un ombilic.

Si une cubique plane admet un A^3 perpendiculaire à son plan, elle ne possède aucun point d'inflexion à distance finie, ni centre, ni point crunodal, ni rebroussement.

Si une courbe algébrique plane de troisième classe admet un A^3 perpendiculaire à son plan, elle ne possède, à distance finie, ni inflexion, ni bitangente.

Si une courbe algébrique plane de quatrième ordre admet un A^4 perpendiculaire à son plan, elle ne possède aucun point multiple à tangentes réelles.

Une cubique à A^3 possède toujours trois asymptotes à distance finie, et n'en rencontre aucune.

Chapitre IV.

Deux surfaces ayant la symétrie d'une tourmaline.

§ 1. — Symétrie cristallographique de la tourmaline.

63. — Imaginons une pyramide triangulaire régulière. Elle possède un axe de symétrie ternaire. Par chaque arête latérale et l'apothème de la face opposée, passe un plan de symétrie. Le symbole (15) est donc:

$$A^3, 3P.$$

Prenons un prisme triangulaire régulier, et, sur chacune de ses bases, plaçons une pyramide régulière, mais de telle façon que les deux pyramides n'aient pas la même hauteur. Le solide total conserve la même symétrie et donne une idée suffisamment exacte du cristal de tourmaline.

§ 2. — Deux cubiques planes.

64. — Soit d'abord la courbe que représente l'équation:

$$x^3 + y^3 = a^3 , \qquad (1)$$

où l'on suppose: $a > o$. Elle rencontre les axes aux points (a, o) et (o, a). Elle admet la bissectrice $(x = y)$ comme axe de symétrie Λ^2. L'équation (1) peut s'écrire:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = a^3 ;$$

la courbe est donc asymptote à la droite:

$$x + y = 0 .$$

La cubique rencontre la droite de l'infini en un seul point réel: elle est du groupe b (1). A toute valeur de x correspond une seule valeur réelle de y, et réciproquement; par conséquent, la courbe ne possède aucun point double, elle n'est pas unicursale. Mais elle est unipartite. C'est donc une cubique [2°, b].

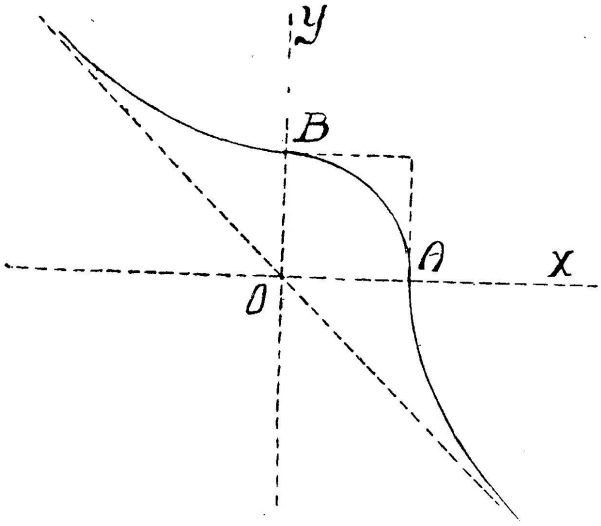

Fig. 8.

En dérivant deux fois l'équation (1), on trouve:

$$x^2 + y^2 y' = 0 ; \qquad (2)$$

$$2x + 2yy'^2 + y^2 y'' = 0 . \qquad (3)$$

De (2), on tire

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} \leq 0 ;$$

l'ordonnée y est constamment décroissante. En A et B, les tangentes sont parallèles aux axes coordonnés. Des équations (2) et (3) combinées, on déduit le rayon de courbure (50):

$$\rho = \frac{(x^4 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^3 xy} ;$$

cette formule montre que les points A et B sont des inflexions.

65. — Prenons un triangle équilatéral comme figure de référence, et considérons la cubique:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = m^3 \ . \qquad (4)$$

Par les sommets du triangle fondamental, menons des parallèles à ses côtés. Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouvelle figure de référence.

Pour un point quelconque du plan (M), nous aurons:

$$\alpha = \mathrm{PM} \ ; \qquad \alpha' = \mathrm{P'M} \ .$$

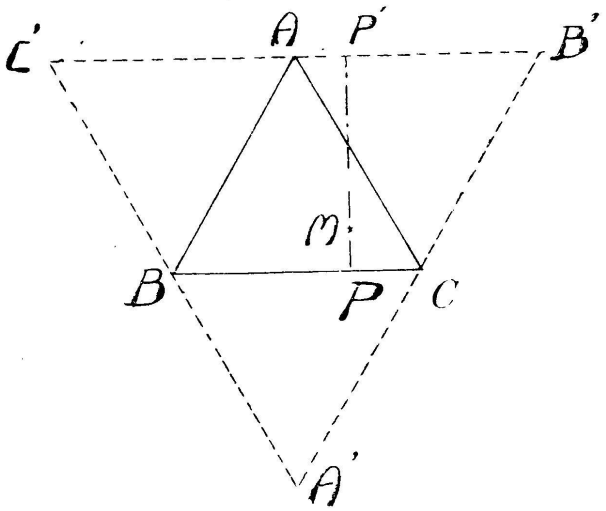

Fig. 9.

Si h désigne la hauteur du premier triangle, il viendra:

$$h = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' \ ,$$
$$2h = \alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \alpha') \ ;$$
$$2\alpha = -\alpha' + \beta' + \gamma' \ ;$$
$$2\beta = \alpha' - \beta' + \gamma' \ ;$$
$$2\gamma = \alpha' + \beta' - \gamma' \ ;$$

L'équation (4) peut donc s'écrire:

$$8m^3 = (-\alpha' + \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' - \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' + \beta' - \gamma')^3$$
$$= (\alpha' + \beta' + \gamma')^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' = 8h^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' \ ;$$

donc : $\alpha'\beta'\gamma' = \frac{1}{3}(h^3 - m^3)$.

Nous retrouvons une cubique dont il s'est agi précédemment (2).

66. — Comme digression, nous pourrons énoncer le théorème suivant:

On admet la règle des signes des coordonnées trilinéaires absolues, et l'on considère un triangle équilatéral de référence. Le lieu géométrique des points dont le produit des distances aux trois côtés du triangle fondamental est une constante, est

en même temps le lieu géométrique des points dont la somme des cubes des distances aux côtés du triangle médian est également constante.

§ 3. — Une première surface.

67. — Nous allons étudier la surface:

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^3 ,$$

où la constante p est positive. Cette surface ne possède aucun point dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle admet un axe ternaire d'équations:

$$x = y = z ,$$

et trois plans de symétrie:

$$y = z ; \qquad z = x ; \qquad x = y ;$$

passant par l'axe Λ^3. Nous avons donc bien affaire à une surface-tourmaline (63).

L'axe Λ^3 rencontre la surface en un ombilic (62):

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} .$$

68. — Coupons la surface par un plan normal au Λ^3 Plus haut (27), nous avons établi des formules pour la transformation des coordonnées:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z)\sqrt{\frac{3}{2}} ;$$

la section a donc pour équation triangulaire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \left(p\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 . \qquad (1)$$

Si le plan sécant a pour équation:

$$x + y + z = l ,$$

le triangle fondamental aura pour hauteur:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pm l \sqrt{\frac{3}{2}} , \qquad (2)$$

suivant que l est $>$ ou $<$ O.

La cubique d'intersection est donc une courbe que nous avons étudiée (65). Si l'on se reporte au début de ce travail (2) et qu'on tienne compte des équations (1) et (2), on verra que nous sommes en droit de formuler les conclusions suivantes:

Pour de très grandes valeurs de l (par exemple $\geqq$ 20 p), la courbe d'intersection se compose de trois branches infinies, asymptotes aux côtés du triangle fondamental. Si l'on se reporte au n° 65, on verra que, pour $l = +l'$ et $l = -l'$, les deux triangles asymptotiques ont des dispositions inverses. Ceci démontre qu'il n'existe aucun plan de symétrie, perpendiculaire au Λ^3. Dans les deux sens où l'on peut parcourir cet axe, la surface se comporte donc différemment. D'ailleurs, quelque grande que soit la valeur attribuée à l, on obtient toujours une section.

Empruntant un terme à la cristallographie, nous dirons que la surface est hémimorphe. Le cristal hémimorphe de tourmaline porte des faces différentes à ses deux bouts (63).

En géométrie analytique élémentaire, les deux paraboloïdes du second ordre sont des surfaces hémimorphes.

69. — Perpendiculairement à l'axe ternaire, il existe un plan sécant qui ne rentre pas dans la théorie précédente, et qui mérite une mention spéciale. C'est le plan:

$$x + y + z = 0 .$$

Il n'y a plus de triangle de référence. On obtient alors une cubique qui se projette, sur le plan des (x, y) suivant une autre cubique ayant pour équation:

$$3xy\,(x + y) + p^3 = 0 .$$

C'est une cubique [2°, a], dont les trois asymptotes sont concourantes. Dans l'espace, la cubique-section a donc aussi trois asymptotes concourantes.

70. — Coupons maintenant la surface par des plans parallèles aux plans coordonnés. Un plan parallèle au plan zox donne une section représentable par les deux équations:

$$y = b \ , \qquad x^3 + z^3 = p^3 - b^3 \ . \tag{C}$$

Nous avons étudié cette courbe (64). C'est une cubique ayant pour asymptote la droite d'équations:

$$y = b \ , \qquad x + z = 0 \ .$$

Le lieu géométrique de toutes ces asymptotes est le plan:

$$x + z = 0 \ .$$

Supposons que les axes aient la disposition habituelle: les cotes sont comptées positivement vers le haut. Alors la courbe (C) est située au-dessous ou bien au-dessus de son asymptote suivant que la constante b est plus grande ou plus petite que p. Pour $b = p$, on trouve une droite d'équations: $y = p$; $x + z = 0$.

Cette droite rencontre l'axe Oy (A C).

Il y a deux autres droites analogues, conformément à la symétrie autour du Λ^3. Ces trois droites appartiennent à la surface, et forment un triangle équilatéral.

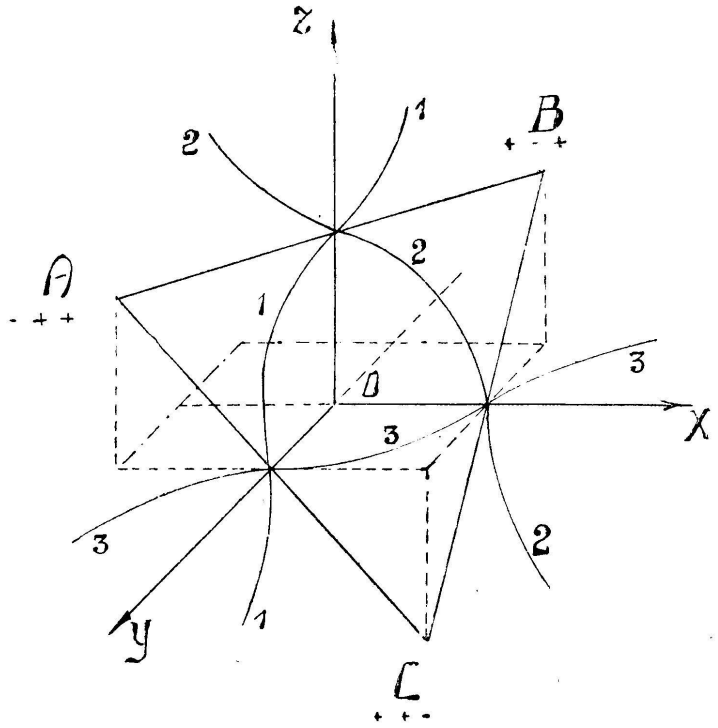

Fig. 10.

71. — A tout système de valeurs de deux des coordonnées correspond une et une seule valeur réelle de la troisième.

Les plans coordonnés coupent la surface suivant trois cubiques égales, que nous appellerons sections principales.:

$$x = 0 \ , \qquad y^3 + z^3 = p^3 \ ; \tag{1}$$
$$y = 0 \ , \qquad x^3 + z^3 = p^3 \ ; \tag{2}$$
$$z = 0 \ , \qquad x^3 + y^3 = p^3 \ . \tag{3}$$

On pourrait engendrer la surface de la manière suivante: une cubique, analogue à (2), se déplacerait parallèlement à l'axe Oy, tout en se déformant d'une façon continue, et en s'appuyant sur les deux courbes fixes (1) et (3).

72. — Soient X, Y, Z les coordonnées courantes. Le plan tangent en x, y, z, a pour équation:

$$x^2 X + y^2 Y + z^2 Z = p^3 \ .$$

Les coordonnées du point A sont: $-p$, $+p$, $+p$; le plan tangent en A, est donc représenté par l'équation:

$$X + Y + Z = p \ .$$

Le plan A B C est donc un plan tritangent; les trois points de contact sont A, B, C.

Cette singularité est conforme à la symétrie.

73. — Supposons que ce plan tangent singulier soit rendu horizontal; l'axe ternaire est alors vertical. De l'ombilic comme centre, dessinons un « cercle géodésique », de très grand rayon: sur toutes les géodésiques issues de l'ombilic, portons une longueur égale à $50p$, par exemple. Les extrémités de toutes les lignes obtenues forment une courbe fermée qu'on nomme cercle géodésique. Cette courbe fermée fait songer à des montagnes russes. Un mobile qui la parcourrait entièrement, ferait trois montées et trois descentes, conformes à la symétrie autour du A^3 et par rapport aux trois plans P.

74. — Passons enfin à l'étude de la courbure totale. En appliquant toujours la même formule (43), on trouve:

$$k = \frac{4p^3 xyz}{(x^4 + y^4 + z^4)^2} \ .$$

Le long des sections principales (71), la courbure totale est donc nulle. Les sections principales décomposent la surface en sept régions, comme un triangle dans un plan (9): dans quatre

de ces régions, la courbure totale est positive; dans les trois autres, elle est négative.

L'ensemble des trois sections principales constitue le lieu géométrique des points paraboliques.

Tout ceci est conforme à la symétrie.

§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

75. — Dans les deux paragraphes qui vont suivre, nous donnerons moins de détails que dans les deux précédents.

Examinons d'abord la cubique plane:

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 \ , \qquad \text{(E)}$$

où l'on peut supposer $p > 0$. L'hypothèse $c = 0$ nous ramène à la cubique [5°, c]: $x^2 y = p^3$, que nous avons indiquée plus haut (26).

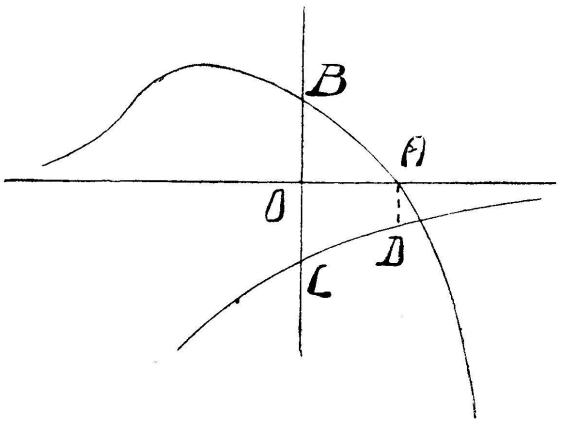

Fig. 11.

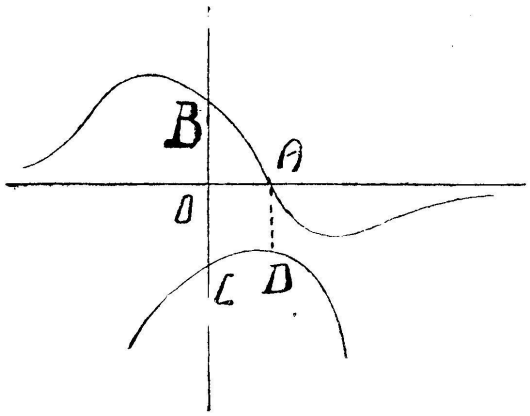

Fig. 12.

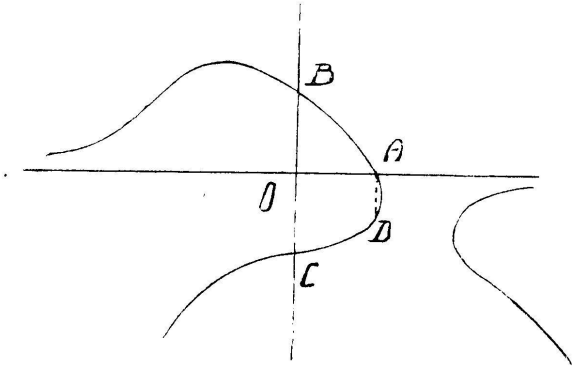

Fig. 13.

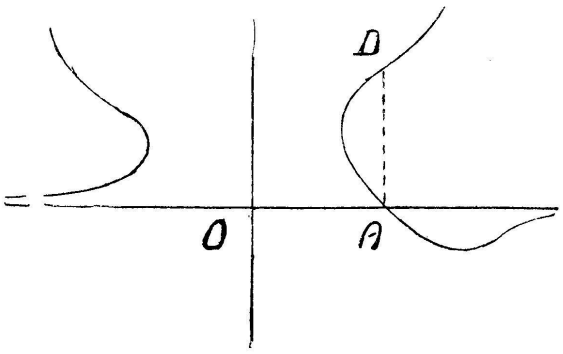

Fig. 14.

Fig. 11 : $3c^3 = 4p^3$.

Fig. 12 : $0 < 3c^3 < 4p^3$.

Fig. 13 : $3c^3 > 4p^3$.

Fig. 14 : $c < 0$.

76. — Cette cubique, quelle que soit la constante c, est tangente à la droite de l'infini, et admet l'axe des x comme asymptote. Rencontre-t-elle les axes coordonnés ? L'hypothèse $y = 0$ entraîne:

$$x = \frac{p^3}{c^2} > 0 \ ;$$

donc la courbe rencontre toujours son asymptote à distance finie, une seule fois, à droite de l'origine (A). De même, $x = 0$ donne:

$$y = \pm \sqrt{\frac{p^3}{c}} \ ;$$

la courbe ne rencontre pas l'axe des y quand c est < 0 (fig. 14); dans le cas contraire (fig. 11, 12, 13), elle le rencontre en deux points (B, C) symétriques par rapport à l'origine. Quand c est < 0, la cubique ne possède aucun point dans l'angle des axes où les deux coordonnées sont négatives (fig. 14).

En résolvant l'équation (E), on trouve:

$$2cy = -x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4c^3x + 4cp^3} \ ; \qquad (1)$$

$$2xy = -c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4p^3y - 4cy^3} \ . \qquad (2)$$

On en conclut l'existence de deux coniques diamétrales, conjuguées aux cordes asymptotiques:

$$x^2 + 2cy = 0 \qquad \text{parabole ;}$$

$$2xy + c^2 = 0 \qquad \text{hyperbole équilatère.}$$

77. — La cubique peut-elle admettre un point double à distance finie ? Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir simultanément:

$$f \equiv x^2y + cy^2 + c^2x - p^3 = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + c^2 = 0 \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2cy = 0 \ .$$

Les deux coniques diamétrales doivent donc se couper sur la cubique. En éliminant x, y entre les trois équations précédentes, on trouve : $3c^3 = 4p^3$. On obtient alors la cubique crunodale, que représente la fig. 11 (page 182). C'est une cubique [4°, c].

78. — Discutons d'abord la formule (2). La quantité subradicale est un polynome du troisième degré, qui ne doit prendre que des valeurs positives. Le coefficient de y^3 est $-4c$. Quand c est > 0, il y a donc un maximum pour y; on sait, en effet, que, pour des valeurs de la variable, de module suffisamment grand, tout polynome a le signe du terme où l'exposant de la variable est le plus élevé (fig. 11, 12, 13). Quand c est < 0, il existe un minimum de y (fig. 14).

Le polynome dont nous nous occupons, peut d'ailleurs s'écrire:

$$-4c\left(y^3 - \frac{p^3}{c}y - \frac{c^3}{4}\right).$$

Le discriminant de la parenthèse est:

$$\frac{c^6}{64} - \frac{p^9}{27c^3} = (3c^3 - 4p^3) \times \frac{9c^6 + 12c^3p^3 + 16p^6}{64 \times 27c^3}.$$

Si l'on raisonne comme pour le trinome du second degré, l'on arrive aux conclusions suivantes:

1° $0 < 3c^3 < 4p^3$: y admet un minimum et deux maxima (fig. 12);

2° $3c^3 > 4p^3$: y admet un seul maximum;

3° $c < 0$: y admet un seul minimum.

79. — De la formule (1), page 48, nous pourrons déduire quelques résultats analogues. Soit $f(x)$ le polynome subradical. L'équation.

$$f(x) \equiv x^4 - 4c^3x + 4cp^3 = 0$$

admet au moins deux racines imaginaires (théorème des lacunes).

Quand c est < 0 (fig. 14), l'équation a deux racines réelles, de signes contraires, entre lesquelles l'abscisse variable ne peut pas être comprise.

Supposons que c soit > 0. Si deux racines sont réelles, elles sont positives (Théorème de Descartes). Cherchons quand ce dernier fait se produit: le minimum de $f(x)$ doit être négatif. Or on a:

$$f'(x) = 4(x^3 - c^3) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad x = c;$$

quand les deux racines sont réelles, elles comprennent c (Théorème de Rolle); ensuite:

$$f''(x) = 12x^2 \; ; \quad f''(c) = 12c^2 > 0 \; ;$$
$$f(c) = c^4 - 4c^4 + 4cp^3$$
$$= - c(3c^3 - 4p^3) \; .$$

Dans le cas des fig. 11 et 12 (page 182), le minimum de $f(x)$ n'est pas négatif; l'abscisse x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le cas des fig. 13 et 14, il existe un intervalle où la variable ne peut pas entrer.

80. — Voici les coefficients angulaires de quelques tangentes:

$$m = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{2xy + c^2}{x^2 + 2cy} \; ;$$

$$m_A = - \frac{c^2}{\frac{p^6}{c^4}} = - \frac{c^6}{p^6} < 0 \; ;$$

$$m_{B,C} = - \frac{c^2}{\pm 2c\sqrt{\frac{p^3}{c}}} = \mp \frac{c^2}{2\sqrt{cp^3}} \lessgtr 0 \; ,$$

les tangentes aux points B, C, se coupent sur l'asymptote.

Remarque. — La parallèle menée à l'axe des y, par le point A rencontre la courbe en un point D, de coordonnées:

$$x = \frac{p^3}{c^2} \; , \qquad y = - \frac{p^6}{c^5} \; .$$

81. — Résumons ce qui précède dans un tableau synoptique:

$c < 0$: unipartite non singulière [2°, c];

$c = 0$: cuspidale [5°, c];

$0 < c < p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: bipartite [1°, c];

$c = p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: crunodale [4°, c];

$c > p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: unipartite non singulière [2°, c].

La recherche des points d'inflexion nous entraînerait trop loin.

82. — Passons à la cubique:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 \tag{1}$$

Elle va nous fournir l'occasion d'appliquer l'un de nos principes généraux (Chapitre III).

D'après ce qu'on a vu plus haut (62), cette cubique admet trois asymptotes, que nous allons, tout d'abord, rechercher.

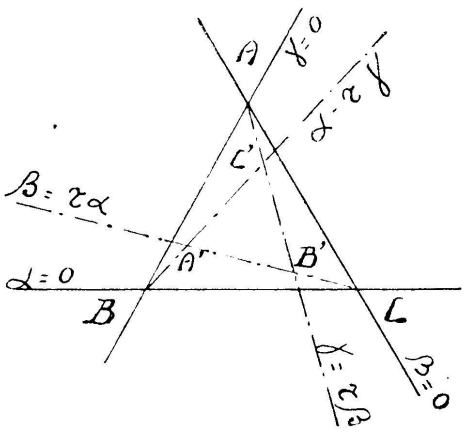

Fig. 15.

Par le sommet A, on peut mener trois droites asymptotiques, dont une seule pénètre à l'intérieur du triangle de référence; soit $\gamma = r\beta$ son équation; r est > 0; le système:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 , \qquad \gamma = r\beta ,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = h .$$

doit admettre des solutions infinies. On élimine α et γ; on trouve une équation du troisième degré en β; on doit annuler le coefficient de β^3; il vient:

$$F(r) \equiv r^3 - 3r - 1 = 0 ; \tag{2}$$

cette équation admet une et une seule racine positive (Théorème de Descartes); son discriminant est:

$$\frac{1}{4} - \frac{27}{27} = -\frac{3}{4} < 0 ;$$

les trois racines sont donc réelles; il fallait s'y attendre.

La racine positive est supérieure à l'unité, car $F(1) < 0$. Cette racine est indépendante de m.

83. Nous allons effectuer une transformation des coordonnées trilinéaires absolues. Menons les trois droites:

$$\gamma = r\beta ; \qquad \alpha = r\gamma ; \qquad \beta = r\alpha .$$

Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouveau triangle de référence. Dans le « Cours de Géométrie analytique plane » de Falisse, 7e édition, revue et augmentée par A. Gob, Bruxelles, 1912, à la page 578, au nº 735,

on donne une formule qui exprime la distance δ d'un point de coordonnées α, β, γ, à la droite que représente l'équation:

$$\Sigma u\alpha \equiv u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 \ ;$$

à savoir:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - 2\Sigma uv \cos C}} \ .$$

Les angles du triangle primitif sont:

$$A = B = C = 60^\circ \ ;$$

donc:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - \Sigma uv}} \ .$$

Le côté B′C′ a pour équation: $r\beta - \gamma = o$;

$$u = 0 \ , \qquad v = r \ , \qquad w = -1 \ ;$$

il vient:

$$\alpha' = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + 1 + r}} = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + r + 1}} \ .$$

Posons

$$\varepsilon \equiv \sqrt{r^2 + r + 1} = \text{constante positive} \ ;$$

il en résulte:

$$r\beta - \gamma = \varepsilon\alpha' \ , \qquad r\gamma - \alpha = \varepsilon\beta' \ , \qquad r\alpha - \beta = \varepsilon\gamma' \ .$$

En résolvant ces trois équations, on trouve:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon}{3r}(r\alpha' + \beta' + r^2\gamma') \ . \\ \beta &= \frac{\varepsilon}{3r}(r^2\alpha' + r\beta' + \gamma') \ , \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{3r}(\alpha' + r^2\beta' + r\gamma') \ . \end{aligned} \right.$$

On substitue ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtient

$$\begin{aligned} & r(2r + 1)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) \\ & + 3(r^2 + 3r + 1)(\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = \frac{9m^3r^3}{\varepsilon^3} \ . \end{aligned}$$

On a tenu compte de l'équation (2). On a supprimé les accents, devenus inutiles.

La cubique a donc trois axes de symétrie ordinaire; ce sont les bissectrices intérieures du triangle A'B'C'. Ces axes ont une direction qui ne dépend nullement de m.

84. — On peut simplifier la dernière équation. On a:

$$h^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 = \Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\alpha\beta\gamma \ ,$$

d'où l'on tire:

$$3\Sigma\alpha^2\beta = h^3 - (\Sigma\alpha^3 + 6\alpha\beta\gamma) \ ;$$

l'équation de la cubique peut enfin s'écrire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 \gtreqless 0 \ .$$

85. — Recherchons les asymptotes. D'après ce qui précède, il existe une asymptote parallèle au nouveau côté B C.

$$\alpha = \text{constante} \ .$$

En combinant les deux équations:

$$\beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 \ , \qquad \beta + \gamma = h - \alpha \ , \qquad \text{(J)}$$

on obtient:

$$(h - \alpha)\,[(h - \alpha)^2 - 3\beta\gamma] + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 \ .$$

Le coefficient de $\beta\gamma$ est:

$$-3(h - \alpha) + 6\alpha = 3(3\alpha - h) = 0 \ .$$

Les équations des asymptotes sont donc:

$$\alpha = \frac{h}{3} \ ; \qquad \beta = \frac{h}{3} \ ; \qquad \gamma = \frac{h}{3} \ .$$

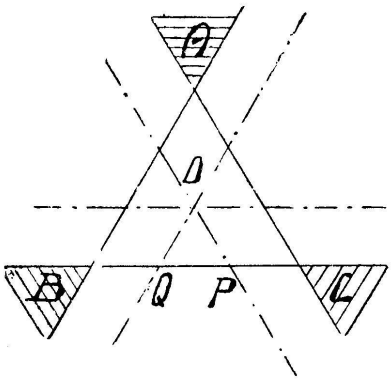

Fig. 16

La cubique a donc trois asymptotes concourantes.

86. — Comment la cubique rencontre-t-elle les côtés du triangle fondamental ? Si, dans les équations (J), on suppose $\alpha = 0$, on obtient:

$$h\,(h^2 - 3\beta\gamma) = k^3 \ , \quad \text{d'où} \quad \beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} \ ;$$

mais:

$$\beta + \gamma = h \ .$$

Les coordonnées β, γ, sont donc racines de l'équation:

$$z^2 - hz + \frac{h^3 - k^3}{3h} = 0 \ , \qquad (1)$$

dont le discriminant est:

$$h^2 - 4\frac{h^3 - k^3}{3h} = \frac{4k^3 - h^3}{3h} \ .$$

La cubique est tangente aux côtés si l'on a:

$$k^3 = \frac{h^3}{4} \ .$$

87. — Quand la cubique passe-t-elle en P ? Il faut que l'équation (1) ait la solution $z = \frac{h}{3}$. Alors:

$$k^3 = \frac{h^3}{3} \ .$$

On peut vérifier directement que, dans ce dernier cas, la cubique dégénère en un système de trois droites:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 = \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)^3 \ ,$$

ou

$$3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = 0 \ ,$$

ou encore:

$$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = 0 \ , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Mais

$$2\alpha - \beta - \gamma = 3\alpha - h \ ;$$

On a donc trois parallèles aux côtés du triangle fondamental, menées par son centre.

88. — La cubique est circonscrite au triangle A B C, si l'on a: $k^3 = h^3$; elle rencontre les trois côtés si $k^3 > \frac{h^3}{4}$; elle ne les rencontre pas si $k^3 < \frac{h^3}{4}$. Quand elle les rencontre, c'est en des points pour lesquels on a:

$$\beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} \ .$$

En mettant à part le cas de la dégénérescence, on a toujours affaire à une cubique [2°, a], qui satisfait aux règles de la symétrie autour d'un Λ^3 (62).

89. — Donnons un tableau-résumé de la discussion qui précède:

$k^3 > h^3$: Rencontre les prolongements des côtés. Chacune des trois branches entoure une région hachurée;

$k^3 = h^3$: Circonscrite au triangle ABC;

$\frac{h^3}{3} < k^3 < h^3$: Rencontre les côtés (entre P et C);

$k^3 = \frac{h^3}{3}$: Trois droites concourantes (dégénérescence);

$\frac{h^3}{4} < k^3 < \frac{h^3}{3}$: Rencontre les côtés (entre P et Q);

$k^3 = \frac{h^3}{4}$: Tangente aux trois côtés;

$k^3 < \frac{h^3}{4}$: Ne rencontre pas les côtés.

Toujours trois asymptotes concourantes.

§ 5. — **Une deuxième surface.**

90. — Nous allons esquisser une théorie de la surface:

$$y^2 z + z^2 x + x^2 y = p^3 \ . \qquad (p > 0)$$

Elle admet certainement un axe de symétrie ternaire, d'équations:

$$x = y = z \ .$$

Elle ne rencontre aucun des axes coordonnés, ne pénètre pas dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle coupe les plans coordonnés suivant trois cubiques [5°,c], analogues à celle que nous avons étudiée plus haut (26, 75):

$$x = 0 \ , \qquad y^2 z = p^3 \ ;$$
$$y = 0 \ , \qquad z^2 x = p^3 \ ;$$
$$z = 0 \ , \qquad x^2 y = p^3 \ .$$

91. — Un plan parallèle à l'un des plans coordonnés ($z = c$), fournit, comme section, la cubique:

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 \ ,$$

que nous avons discutée (81). En faisant voyager le plan sécant, en laissant varier c de $-\infty$ à $+\infty$, on engendre la surface par le déplacement continu de la section, ce qui permet d'en avoir une première idée assez claire.

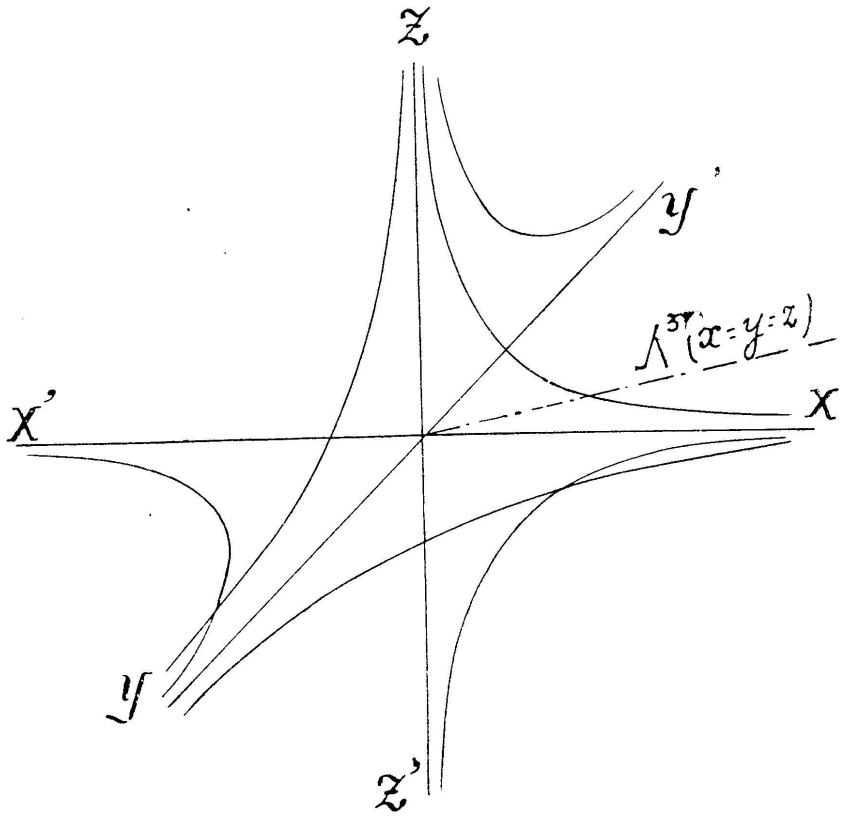

Fig. 17.

Un plan perpendiculaire au Λ^3 (27) donne une cubique unipartite non unicursale, à trois asymptotes concourantes (82, 84, 89). Les directions asymptotiques de cette courbe restent invariables, quand le plan sécant se déplace (82, 83). Le lieu des asymptotes se compose de trois plans qui se coupent suivant le Λ^3. Du tableau-résumé du n° 89, on déduit que la surface est hémimorphe (63, 68).

92. — De l'étude que nous avons faite de la dernière cubique (83), résulte encore la propriété suivante: Les trois plans des asymptotes forment des dièdres dont les trois plans bissecteurs sont des plans de symétrie de la surface.

L'axe ternaire rencontre la surface en un seul point:

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} ;$$

celui-ci n'est pas un centre, car si l'on y transporte l'origine des coordonnées, l'équation de la surface devient:

$$\Sigma\left(y' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}}\right)^2\left(z' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}}\right) = p^3 ,$$

et cette équation renferme un terme de degré pair et deux termes de degrés impairs.

La surface possède bien la symétrie de la tourmaline (63):

$$\Lambda^3 , \quad 3P .$$

93. — En x, y, z, le plan tangent a pour équation:

$$(z^2 + 2xy)X + (x^2 + 2yz)Y + (y^2 + 2zx)Z = 3p^3 .$$

Au point où la surface rencontre son axe de symétrie, le plan tangent a pour équation:

$$X + Y + Z = p\sqrt[3]{9} .$$

Le point de contact est donc un point ordinaire (19), et, par conséquent, un ombilic (62).

94. — Signalons enfin trois points de coordonnées simples, appartenant à la surface:

$$-p , \quad p , \quad p ; \qquad p , \quad -p , \quad p ; \qquad p , \quad p , \quad -p .$$

En ces trois points, les plans tangents ont pour équations:

$$X - 3Y + Z + 3p = 0 ;$$
$$X + Y - 3Z + 3p = 0 ;$$
$$-3X + Y + Z + 3p = 0 .$$

Ces trois plans tangents se coupent sur l'axe ternaire.

95. — Une discussion, semblable aux précédentes, prouverait que les équations:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 ; \qquad y^2 z + z^2 x + x^2 y = 0 ,$$

représentent des cônes rhomboédriques, ayant donc la symétrie du spath d'Islande:

$$C , \quad \Lambda^3 , \quad 3\Lambda^2 ,$$
$$3P .$$