§ 3. — Une première surface.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

en même temps le lieu géométrique des points dont la somme des cubes des distances aux côtés du triangle médian est également constante.

§ 3. — Une première surface.

67. — Nous allons étudier la surface:

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^3 ,$$

où la constante p est positive. Cette surface ne possède aucun point dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle admet un axe ternaire d'équations:

$$x = y = z ,$$

et trois plans de symétrie:

$$y = z ; \qquad z = x ; \qquad x = y ;$$

passant par l'axe Λ^3. Nous avons donc bien affaire à une surface-tourmaline (63).

L'axe Λ^3 rencontre la surface en un ombilic (62):

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} .$$

68. — Coupons la surface par un plan normal au Λ^3 Plus haut (27), nous avons établi des formules pour la transformation des coordonnées:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z)\sqrt{\frac{3}{2}} ;$$

la section a donc pour équation triangulaire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \left(p\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 . \qquad (1)$$

Si le plan sécant a pour équation:

$$x + y + z = l ,$$

le triangle fondamental aura pour hauteur:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pm l \sqrt{\frac{3}{2}} , \qquad (2)$$

suivant que l est $>$ ou $<$ O.

La cubique d'intersection est donc une courbe que nous avons étudiée (65). Si l'on se reporte au début de ce travail (2) et qu'on tienne compte des équations (1) et (2), on verra que nous sommes en droit de formuler les conclusions suivantes:

Pour de très grandes valeurs de l (par exemple $\geqq$ 20 p), la courbe d'intersection se compose de trois branches infinies, asymptotes aux côtés du triangle fondamental. Si l'on se reporte au n° 65, on verra que, pour $l = +l'$ et $l = -l'$, les deux triangles asymptotiques ont des dispositions inverses. Ceci démontre qu'il n'existe aucun plan de symétrie, perpendiculaire au Λ^3. Dans les deux sens où l'on peut parcourir cet axe, la surface se comporte donc différemment. D'ailleurs, quelque grande que soit la valeur attribuée à l, on obtient toujours une section.

Empruntant un terme à la cristallographie, nous dirons que la surface est hémimorphe. Le cristal hémimorphe de tourmaline porte des faces différentes à ses deux bouts (63).

En géométrie analytique élémentaire, les deux paraboloïdes du second ordre sont des surfaces hémimorphes.

69. — Perpendiculairement à l'axe ternaire, il existe un plan sécant qui ne rentre pas dans la théorie précédente, et qui mérite une mention spéciale. C'est le plan:

$$x + y + z = 0 .$$

Il n'y a plus de triangle de référence. On obtient alors une cubique qui se projette, sur le plan des (x, y) suivant une autre cubique ayant pour équation:

$$3xy\,(x + y) + p^3 = 0 .$$

C'est une cubique [2°, a], dont les trois asymptotes sont concourantes. Dans l'espace, la cubique-section a donc aussi trois asymptotes concourantes.

70. — Coupons maintenant la surface par des plans parallèles aux plans coordonnés. Un plan parallèle au plan zox donne une section représentable par les deux équations:

$$y = b \ , \qquad x^3 + z^3 = p^3 - b^3 \ . \tag{C}$$

Nous avons étudié cette courbe (64). C'est une cubique ayant pour asymptote la droite d'équations:

$$y = b \ , \qquad x + z = 0 \ .$$

Le lieu géométrique de toutes ces asymptotes est le plan:

$$x + z = 0 \ .$$

Supposons que les axes aient la disposition habituelle: les cotes sont comptées positivement vers le haut. Alors la courbe (C) est située au-dessous ou bien au-dessus de son asymptote suivant que la constante b est plus grande ou plus petite que p. Pour $b = p$, on trouve une droite d'équations: $y = p$; $x + z = 0$.

Cette droite rencontre l'axe Oy (A C).

Il y a deux autres droites analogues, conformément à la symétrie autour du Λ^3. Ces trois droites appartiennent à la surface, et forment un triangle équilatéral.

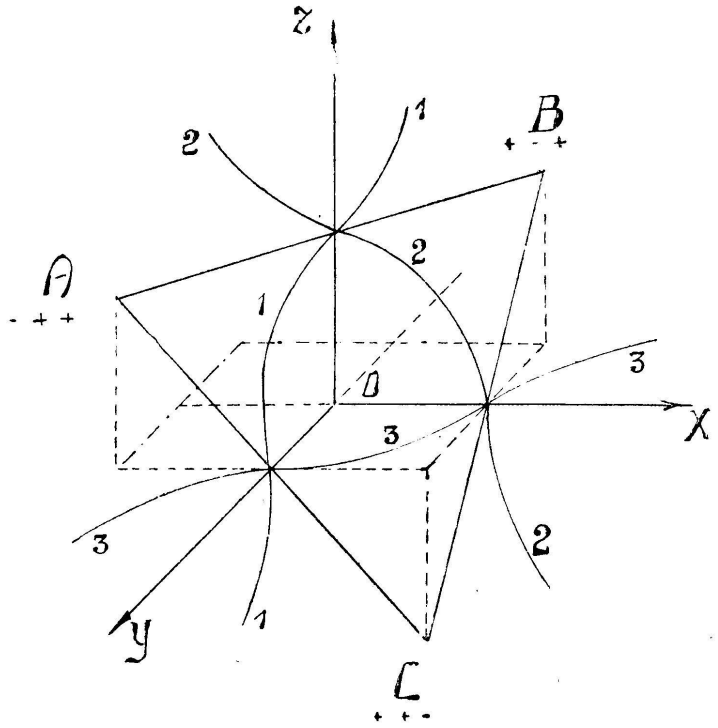

Fig. 10.

71. — A tout système de valeurs de deux des coordonnées correspond une et une seule valeur réelle de la troisième.

Les plans coordonnés coupent la surface suivant trois cubiques égales, que nous appellerons sections principales.:

$$x = 0 \ , \qquad y^3 + z^3 = p^3 \ ; \tag{1}$$
$$y = 0 \ , \qquad x^3 + z^3 = p^3 \ ; \tag{2}$$
$$z = 0 \ , \qquad x^3 + y^3 = p^3 \ . \tag{3}$$

On pourrait engendrer la surface de la manière suivante: une cubique, analogue à (2), se déplacerait parallèlement à l'axe Oy, tout en se déformant d'une façon continue, et en s'appuyant sur les deux courbes fixes (1) et (3).

72. — Soient X, Y, Z les coordonnées courantes. Le plan tangent en x, y, z, a pour équation:

$$x^2 X + y^2 Y + z^2 Z = p^3 \ .$$

Les coordonnées du point A sont: $-p$, $+p$, $+p$; le plan tangent en A, est donc représenté par l'équation:

$$X + Y + Z = p \ .$$

Le plan A B C est donc un plan tritangent; les trois points de contact sont A, B, C.

Cette singularité est conforme à la symétrie.

73. — Supposons que ce plan tangent singulier soit rendu horizontal; l'axe ternaire est alors vertical. De l'ombilic comme centre, dessinons un « cercle géodésique », de très grand rayon: sur toutes les géodésiques issues de l'ombilic, portons une longueur égale à $50p$, par exemple. Les extrémités de toutes les lignes obtenues forment une courbe fermée qu'on nomme cercle géodésique. Cette courbe fermée fait songer à des montagnes russes. Un mobile qui la parcourrait entièrement, ferait trois montées et trois descentes, conformes à la symétrie autour du A^3 et par rapport aux trois plans P.

74. — Passons enfin à l'étude de la courbure totale. En appliquant toujours la même formule (43), on trouve:

$$k = \frac{4p^3 xyz}{(x^4 + y^4 + z^4)^2} \ .$$

Le long des sections principales (71), la courbure totale est donc nulle. Les sections principales décomposent la surface en sept régions, comme un triangle dans un plan (9): dans quatre

de ces régions, la courbure totale est positive; dans les trois autres, elle est négative.

L'ensemble des trois sections principales constitue le lieu géométrique des points paraboliques.

Tout ceci est conforme à la symétrie.

§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

75. — Dans les deux paragraphes qui vont suivre, nous donnerons moins de détails que dans les deux précédents.

Examinons d'abord la cubique plane:

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 \ , \qquad \text{(E)}$$

où l'on peut supposer $p > 0$. L'hypothèse $c = 0$ nous ramène à la cubique [5°, c]: $x^2 y = p^3$, que nous avons indiquée plus haut (26).

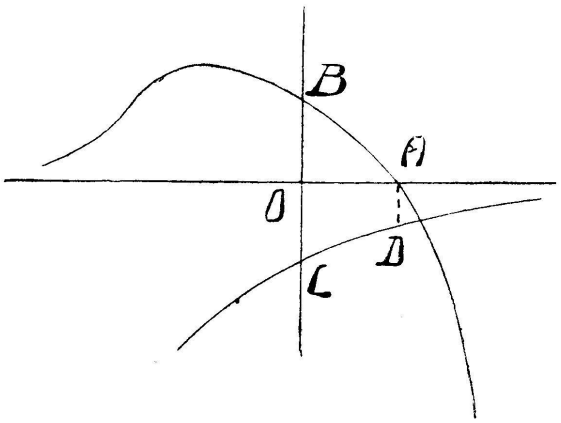

Fig. 11.

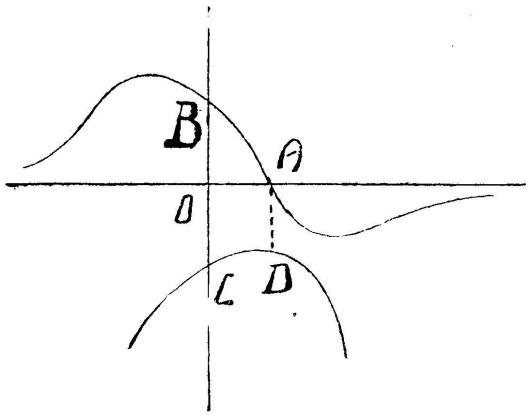

Fig. 12.

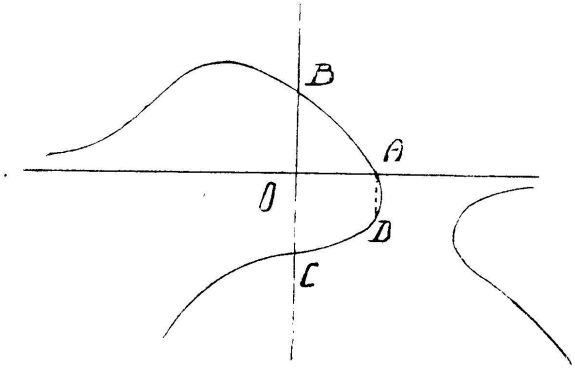

Fig. 13.

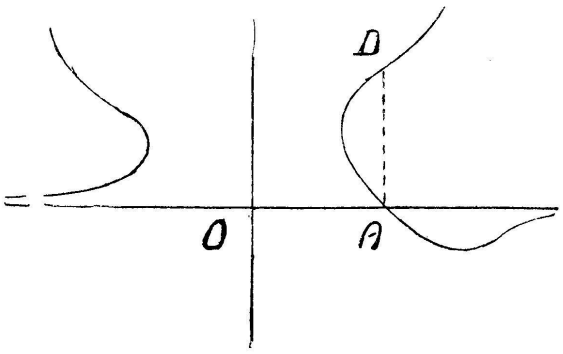

Fig. 14.

Fig. 11 : $3c^3 = 4p^3$.

Fig. 12 : $0 < 3c^3 < 4p^3$.

Fig. 13 : $3c^3 > 4p^3$.

Fig. 14 : $c < 0$.