VIII. — Métrique. Courbure. Gravitation.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

VIII. — Métrique. Courbure. Gravitation.

Maintenant que nous avons constaté que la dérivation d'expressions à deux indices conduisait à percevoir l'existence d'une forme quadratique (28), il reste à s'expliquer sur les coefficients g_{ij} de celle-ci et sur le choix des fonctions Γ jusqu'ici complètement indéterminées. C'est là que peuvent intervenir diverses hypothèses auxquelles correspondent diverses théories gravifiques.

L'hypothèse la plus simple, à laquelle correspond la géométrie de Riemann, consiste à admettre que toutes les dérivées en D des g_{ij} sont nulles. Ceci entraîne, d'après les formules du paragraphe VI, que des g^{ij} et des g^i_j ont également leurs dérivées en D identiquement nulles, si g^{ij} est le quotient par g du mineur de g_{ij} dans le déterminant g des g_{ij} et si

$$g^i_j = g^{\alpha i} g_{\alpha j} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i \neq j \\ 1, & \text{si} \quad i = j \end{cases} . \tag{32}$$

Rappelons que l'équation

$$\frac{D}{Dx_i} g_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - g_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ik} - g_{\alpha k} \Gamma^\alpha_{ij} = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = 0 ,$$

donne

$$2 \begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} .$$

On a ainsi

$$\Gamma^\alpha_{ik} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ \alpha \end{Bmatrix} = g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} i\,k \\ \beta \end{bmatrix} .$$

Les B à quatre indices exprimés en (31) sont alors les composantes de la courbure riemannienne, courbure dont la théorie pourrait être ici esquissée rapidement. Allons plus directement au but en utilisant l'opérateur (32) qui, aux B à quatre indices, fera correspondre des G à deux indices seulement (contraction; *Verjüngung*), soit

$$G_{\alpha i} = g^k_j B^k_{\alpha ij} .$$

Ces G sont encore des composantes de courbure, ce que, par exemple, on peut vérifier aisément dans le cas d'une surface ordinaire sur laquelle on aurait

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2 \,.$$

Alors $g^{\alpha i}\, G_{\alpha i}$ correspond à la courbure totale de la surface.

Pour revenir au cas général, l'essentiel est que l'on tient maintenant des $G_{\alpha i}$ et des $g_{\alpha i}$ qui sont en même nombre (10 dans E_4); l'équation

$$G_{\alpha i} = 0 \,, \tag{33}$$

qui est la plus simple des lois de gravitation, exprime un mode de courbure de l'espace-temps qui est vraisemblablement le plus simple. Cette équation permet la détermination des $g_{\alpha i}$, c'est-à-dire d'un ds^2 auquel correspondent des géodésiques-trajectoires, etc.

Nous n'irons pas plus loin dans cette voie car l'exposition que nous aurions à faire pour continuer ne différerait pas de celles déjà faites par maints auteurs.

Terminons par quelques remarques analytiques.

Pour arriver à (33), il vaut mieux passer par (30) que par (29). En effet, former les G à partir de (29) c'est faire, dans le second membre $\alpha = i$, opération impossible à indiquer sur le premier membre qui ne porte pas explicitement l'indice α. Il en est autrement, avec (30), pour $k = j$ et l'on pourrait même énoncer la loi de gravitation (33) sous cette forme: *les expressions*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP^j}{Dx_i} & \dfrac{DP^i}{Dx_j} \end{vmatrix}$$

sont nulles, quel que soit le vecteur P. Sous cette physionomie, on voit combien la loi est proche des formules stokiennes fondamentales qui ont également servi de base à l'électromagnétisme.

Soyons également très bref sur les déjà nombreuses extensions des théories einsteiniennes. Ainsi A.-S. Eddington (*Math. Theory*, p. 217) pose

$$\frac{D}{Dx_i}\, g_{jk} = 2K_{jk,i}$$

en faisant naître cette formule de considérations métriques inutiles à invoquer ici comme base.

Si $K_{jk.i} = g_{jk} \varkappa_i$, on retrouve la métrique de Weyl; pour $\varkappa_i$ nul celle de Riemann.

IX. — Bibliographie.

Nous n'indiquons ici que les écrits auxquels nous avons fait un emprunt précis pour la rédaction de ce qui précède. Les auteurs sont rangés par ordre alphabétique ce qui ne nous empêche point de mentionner que ceux qui ont joué le rôle le plus important sont MM. Th. De Donder, A.-S. Eddington, H. Weyl.

A. Buhl. 1° *Sur les formules fondamentales de l'Electromagnétisme et de la Gravifique.* Trois Mémoires (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 1920–1921–1923). 2° *Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », 1922).

E. Cartan. 1° *Leçons sur les Invariants intégraux* (J. Hermann, Paris, 1922). Exposé systématique relatif surtout aux formes différentielles. La « dérivation extérieure » revient à la construction des formules stokiennes. Voir une analyse de l'ouvrage dans *L'Enseign. math.* (1921–22, p. 389). 2° *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (« Annales de l'Ecole Normale, 1923). Travail qui, parmi les nombreuses publications de M. Cartan sur le sujet, paraît tout particulièrement d'envergure prodigieuse. Le point de départ est celui que nous avons toujours adopté. « Au fond, écrit M. Cartan (*loc. cit.*, p. 329), les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Electromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée ».

Th. De Donder. 1° *Théorie du champ électro-magnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein.* 2° *La Gravifique einsteinienne* (Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1920 et 1921). Le premier de ces ouvrages donne les formules (14) et (15) ainsi que toute une théorie précisée dans le second et définitive-