# SPECTRES DES PROBABILITÉS

Autor(en): **Petrovitch, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515761

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# SPECTRES DES PROBABILITÉS

PAR

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

---

Je désigne comme *spectre* d'une suite limitée ou illimitée de nombres

$$M_1, M_2, M_3, \ldots \tag{1}$$

un nombre décimal S rattaché à la suite (1) et jouissant de cette propriété que chaque nombre $M_k$ est, directement ou indirectement, déterminé par un groupe de décimales successives de S.

Comme je l'ai montré [1], on peut calculer un spectre d'une suite (1) toutes les fois que cette suite se laisse mettre en correspondance avec une série de puissances dont les coefficients ou bien sont des nombres réels entiers positifs $N_k$, ou bien se laissent ramener à de tels nombres par une transformation

$$\Omega(M_k, N_k, k) = 0 . \tag{2}$$

Or, dans un grand nombre de problèmes de probabilités, la probabilité considérée apparaît comme coefficient d'une puissance $x_k$ dans le développement d'une fonction déterminée $f(x)$ rattachée au problème, ou, plus généralement, comme coefficient de $x^k y^h z^m \ldots$ dans le développement d'une fonction déterminée $F(x, y, z, \ldots)$.

Pour ne citer qu'un des problèmes fondamentaux et des plus élémentaires de cette espèce, considérons deux événements contraires A et B, ayant pour probabilités respectives $p$ et $q$ sur $\mu$ événements dans lesquels l'un ou l'autre de ces événements doit arriver infailliblement. La probabilité $\alpha_k$ pour que, sur

---

[1] *Les spectres numériques* (Gauthier-Villars, Paris. 1919).

$u$ épreuves, l'événement A se produise $\mu - k$ fois (et B $k$ fois), coïncidera avec le coefficient de $x^k$ du polynome

$$f(x) = (p + qx)^\mu = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\mu x^\mu , \qquad (3)$$

$p$ et $q$ étant les probabilités respectives de A et B.

La combinaison la plus probable, c'est-à-dire dans laquelle le nombre d'arrivées de l'événement A est $\mu p$, et celui de B $\mu q$, a la probabilité égale au coefficient de $x^{(1-p)\mu}$ dans le développement (1).

La probabilité pour que, sur $\mu$ épreuves, l'événement A arrive au moins $\mu - k$ fois (c'est-à-dire l'événement B au plus $k$ fois), coïncide avec le coefficient de $x^k$ ($k = 1, 2, 3 \ldots \mu$) dans le développement

$$f_1(x) = \frac{(p + qx)^\mu}{1 - x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots \qquad (4)$$

Lorsque les $u$ épreuves assignent aux événements A et B les probabilités successives

$$(p_1, q_1) , \quad (p_2, q_2) , \ldots (p_\mu, q_\mu) ,$$

la probabilité pour que A arrive au cours de ces $\mu$ épreuves $m$ fois, et B $n$ fois, coïncide avec le coeffidient de $x^m y^n$ dans le développement de la fonction

$$F(x, y) = (xp_1 + yq_1)(xp_2 + yq_2) \ldots (xp_\mu + yq_\mu) . \qquad (5)$$

Dans de pareils cas, la probabilité considérée $P_k$ varie avec un entier positif $k$ désignant, par exemple, le nombre de fois qu'un événement déterminé, dans des circonstances déterminées, est présumé d'arriver sur un nombre fixe $\mu$ d'épreuves.

Formons le polynome de degré $\mu$

$$f(x) = P_1 x + P_2 x^2 + \ldots + P_\mu x^\mu , \qquad (6)$$

et soit

$$\Omega(u, v) \; 0 , \qquad (7)$$

une relation telle qu'à chaque valeur $u = P_k$ correspond, comme solution de (7), un nombre entier positif $v = N_k$. Enfin, soit

$$\varphi(x) = N_1 x + N_2 x^2 + \ldots + N_\mu x^\mu , \qquad (8)$$

le polynome de degré $\mu$ ayant pour coefficients les entiers $N_k$.

Un spectre S de la suite de probabilités $P_k$ sera fourni par la valeur que prend $\varphi(x)$ pour $x = 10^{-h}$, où $h$ est un entier positif convenablement choisi. Notamment, $h$ est un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite $N_k$.

*La probabilité* $P_k$ *pour que l'événement se produise* k *fois sur* $\mu$ *épreuves, sera fournie par la solution en u de l'équation* (7), *après y avoir remplacé v par le groupe de décimales de* S *commençant par la* $(hk+1)^{\text{ième}}$ *et terminé par la* $(k+1)h^{\text{ième}}$ *décimale.*

Dans un grand nombre de problèmes, on connaîtra facilement les polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ rattachés au problème, comme on le voit déjà sur les exemples simples cités. Les probabilités respectives de deux événements A et B étant deux nombres rationnels

$$p = \frac{A}{M}, \qquad q = 1 - \frac{A}{M}, \tag{9}$$

on aura

$$\Omega(u, v) = M^{\mu} u - v, \tag{10}$$

$$\varphi(x) = M^{\mu}[(p + qx)^{\mu} - p^{\mu}], \tag{11}$$

Dans l'exemple où

$$p = \frac{2}{3}, \qquad q = \frac{1}{3}, \tag{12}$$

le spectre des probabilités pour que, sur 10 épreuves, l'événement A se produise $10-k$ fois (et B $k$ fois) ($k = 1, 2, 3 \ldots 10$), sera fourni par la valeur que prend l'expression

$$\varphi(x) = 3^{10}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right)^{10} - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right] = (2 + x)^{10} - 2^{10}, \tag{13}$$

pour $x = 10^{-h}$. Sachant qu'aucun entier $N_k$ n'a plus de cinq chiffres, on peut prendre $h = 5$, ce qui fournit comme spectre des probabilités

$$S = (2 + 10^{-5})^{10} - 2^{10} =$$

$$= 0{,}05120\,11520\,15360\,13440\,08064\,03360\,00960\,00180\,00020\,00001\,. \tag{14}$$

La probabilité pour que, sur 10 épreuves, l'événement A arrive $10-k$ fois (et B $k$ fois), s'obtient en divisant par

$$M^{\mu} = 3^{10} = 59049,$$

le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)^{\text{ième}}$ et terminée par la $(k+1)h^{\text{ième}}$ décimale. Ainsi, pour que A arrive six fois et B quatre fois, il y a la probabilité

$$P_4 = \frac{8064}{59049} = 0{,}136545 .$$

La combinaison la plus probable est celle ayant comme probabilité le groupe de décimales 15360 divisé par 59049, c'est-à-dire la probabilité 0,260123; c'est la combinaison où A arriverait sept fois et B trois fois dans dix épreuves.

Vérification: la probabilité pour que, sur dix épreuves, B arrive au plus $\mu$ fois, c'est-à-dire la certitude, est bien égale à la somme de tous les groupes successifs à cinq décimales de S, augmentée de $2^{10} = 1024$, le tout divisé par 59049, ce qui fait

$$\frac{1024+5120+11520+15360+13440+8064+3360+960+180+20+1}{59049} = 1 .$$

Les probabilités respectives de A et B étant (9), la détermination de la probabilité $Q_k$ pour que, sur $\mu$ épreuves, A arrive au moins $k$ fois (et B au plus $\mu - k$ fois) $(k = 1, 2, \ldots \mu)$ se ramène à la formation du spectre suivant:

Le nombre $Q_k$ étant la somme de $k$ premiers coefficients de la fonction $(p+qx)^\mu$, admettra encore la transformation (10) et le spectre des $Q_k$ sera fourni par la valeur que prend l'expression

$$\varphi_1(x) = M^\mu \frac{(p+qx)}{1-x} , \tag{15}$$

pour $x = 10^{-h}$, où $h$ désigne un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite correspondante $N_k$, Le spectre sera donc le nombre

$$S = M^\mu \frac{(10^h p + q)^\mu}{10^{\mu h} - 10^{(\mu-1)h}} . \tag{16}$$

*La probabilité* $Q_k$ *sera*

$$Q_k = S_k M^{-\mu} , \tag{17}$$

*où* $S_k$ *représente le groupe de décimales de* S *commençant par le* $(hk+1)^{\text{ième}}$ *et terminé par le* $(k+1)h^{\text{ième}}$ *décimale.*

Dans l'exemple cité où $p$ et $q$ ont les valeurs (12), on peut prendre $h = 5$ et l'on aura

$$S = \frac{(2 \,.\, 10^5 + 1)^{10}}{10^{50} - 10^{45}} =$$

$$= 0{,}06144\,17664\,33024\,46464\,54528\,57888\,58848\,59028\,59048\,59049 \;.$$

La probabilité pour que, sur dix épreuves, l'événement A arrive au moins $10-k$ fois (et B au plus $k$ fois) s'obtient en divisant par 59049 le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)^{\text{ième}}$ et terminée par la $(k+1)h^{\text{ième}}$ décimale. Ainsi, pour que A arrive au moins six fois (B au plus quatre fois), il y a la probabilité

$$Q_4 = \frac{46\,464}{59\,049} = 0{,}786872 \;,$$

et pour que B arrive au plus dix fois (la certitude), il y a bien la probabilité

$$Q_{10} = \frac{59\,049}{59\,049} = 1 \;.$$

Mai 1925.

---

# SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES $p-1$ PREMIERS NOMBRES ENTIERS, $p$ ÉTANT UN NOMBRE PREMIER

PAR

A. Lévy (Paris).

---

On sait que la congruence

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \qquad \text{module } p \;, \qquad\qquad (p \text{ premier})$$

admet comme racines, 1, 2, ..., $p-1$. Les coefficients de cette congruence sont

$$a_1 = 0 \;, \qquad a_2 = 0 \;, \ldots, \; a_{p-2} = 0 \;, \qquad a_{p-1} \equiv 1 \;,$$

où la forme de la congruence générale est

$$x^{p-1} - a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \ldots + a_{p-1} \equiv 0 \;, \qquad \text{module } p.$$