MÉTHODE D'HAMILTON POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION VECTORIELLE DU PREMIER DEGRÉ

Autor(en): **Niewenglowski, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515763

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MÉTHODE D'HAMILTON POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION VECTORIELLE DU PREMIER DEGRÉ

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Dans son beau *Traité élémentaire des quaternions*, M. P.-G. TAIT, voulant exposer la méthode suivie par HAMILTON pour résoudre une équation vectorielle du premier degré, s'exprime ainsi: « Nous arrivons maintenant à l'admirable investigation d'Hamilton ».

J'espère avoir rendu un peu plus facile l'exposé de Tait; un lecteur, même peu familiarisé avec l'emploi des quaternions, pourra ainsi apprécier la belle solution donnée par Hamilton.

1. Rappelons quelques formules. Etant donnés deux quaternions q, r; les scalaires des produits qr et rq sont égaux, c'est-à-dire

$$Sqr = Srq \ .$$

2. Soient α, β, γ trois vecteurs non coplanaires et α', β', γ' trois autres vecteurs. Chacun de ces derniers s'exprime linéairement au moyen des trois premiers, de telle sorte que

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= a.\alpha + b.\beta + c.\gamma \\ \beta' &= a'.\alpha + b'.\beta + c'.\gamma \\ \gamma' &= a''.\alpha + b''\beta + c''\gamma \ ; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

nous poserons

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

et nous supposerons $\Delta \neq 0$.

Il s'agit de prouver que

$$S.\alpha'\beta'\gamma' = S.\alpha\beta\gamma.\Delta \ . \tag{2}$$

Pour établir cette identité, il suffit d'exprimer les six vecteurs considérés au moyen des vecteurs unités fondamentaux i, j, k, en posant

$$\begin{aligned} \alpha &= ix + jy + kz \\ \beta &= ix' + jy' + kz' \\ \gamma &= ix'' + jy'' + kz'' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha' &= iX + jY + kZ \\ \beta' &= iX' + jY' + kZ' \\ \gamma' &= iX'' + jY'' + kZ'' \end{aligned}$$

en substituant dans (1) on trouve

$$\begin{aligned} X &= ax + bx' + cx'' \\ Y &= ay + by' + cy'' \\ Z &= az + bz' + cz'' \\ X' &= a'x + b'x' + c'x'' \ , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Or,

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

$$S\alpha'\beta'\gamma' = -\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$$

et le second déterminant est égal au premier multiplié par Δ. L'identité (2) se trouve ainsi vérifiée.

3. Soient q, r, deux quaternions et ρ, σ deux vecteurs; on a:

$$S\sigma Vq\rho r = S\rho Vr\sigma q \ . \tag{3}$$

En effet,

$$Vq\rho r = q\rho r - S.q\rho r \ ,$$

donc

$$S\sigma Vq\rho r = S\sigma q\rho r - S\sigma Sq\rho r \ ,$$

mais $\sigma Sq\rho r$ est un vecteur, donc le dernier terme de l'égalité précédente est nul et l'on a simplement:

$$S\sigma Vq\rho r = S\sigma q\rho r = S\rho r\sigma q = S\rho Vr\sigma q \ .$$

4. Considérons maintenant un nombre quelconque de couples de quaternions q_1, r_1,; q_2, r_2;... et posons

$$\varphi(\rho) = \Sigma \mathrm{V} q \rho r = \mathrm{V} q_1 \rho_1 r_1 + \mathrm{V} q_2 \rho_2 r_2 + \cdots \tag{4}$$

φ (ρ) est évidemment un vecteur. La formule (3) s'applique à chacun des termes de la somme précédente, d'où il suit que

$$\mathrm{S}\sigma\Sigma\mathrm{V} q \rho r = \mathrm{S}\rho\Sigma\mathrm{V} r \sigma q \ .$$

Si l'on pose

$$\varphi'(\sigma) = \Sigma \mathrm{V} r \sigma q \ .$$

on a

$$\mathrm{S}\sigma\varphi(\rho) = \mathrm{S}\rho\varphi'(\sigma) \ . \tag{5}$$

On dit que les fonctions φ et φ' sont conjuguées.

5. Si l'on pose

$$\varphi_1 = \varphi + h \ ,$$

h désignant un scalaire quelconque, il faut entendre par là que, par exemple

$$\varphi_1(\rho) = \varphi(\rho) + h\rho \ ;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{S}\sigma\varphi_1(\rho) &= \mathrm{S}[\sigma\Sigma\mathrm{V} q \rho r + h\sigma\rho] \ , \\ &= \mathrm{S}[\sigma\Sigma\mathrm{V} r \sigma q + h\rho\sigma] \ , \end{aligned}$$

car

$$\mathrm{S}\sigma\rho = \mathrm{S}\rho\sigma \ ;$$

en d'autres termes:

$$\mathrm{S}\sigma\varphi_1(\rho) = \mathrm{S}.\rho\{\Sigma\mathrm{V} r \sigma q + h\sigma\} \ .$$

Si l'on pose

$$\varphi_1' = \varphi_1 + h \ ,$$

ce qui donne

$$\varphi_1'(\sigma) = \varphi_1(\sigma) + h\sigma \ ,$$

on peut écrire:

$$\mathrm{S}\sigma\varphi_1(\rho) = \mathrm{S}\rho\varphi_1'(\sigma) \ .$$

Problème. — Déterminer le vecteur inconnu ρ tel que

$$\Sigma\mathrm{V} q \rho r = \gamma \ , \tag{6}$$

ou (4)

$$\varphi(\rho) = \gamma \ ,$$

γ étant un vecteur donné.

Le problème posé est possible en général. En se donnant les expressions des quaternions q, q_1 ... et du vecteur γ et posant $\rho = ix + jy + kz$, on obtiendra une équation du premier degré en x, y, z qui se décomposera en un système de trois équations en x, y, z que l'on pourra résoudre par les formules de Cramer, Hamilton a donné une solution très élégante, que nous allons développer.

Remarquons en premier lieu, qu'étant donné un vecteur γ on peut, et cela d'une infinité de manières, déterminer deux vecteurs λ, μ perpendiculaires à γ et tels que

$$V\lambda\mu = \gamma .$$

En effet, considérons un trièdre trirectangle OXYZ; supposons que l'axe OZ porte le vecteur γ; prenons un vecteur λ dirigé suivant OX et un vecteur μ dans le plan XOY. Soient I, J, K, les vecteurs-unités dirigés suivant OX, OY, OZ respectivement. Si le trièdre est orienté convenablement, on aura

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \qquad IJ = K \ldots \text{ etc.}$$

Alors, soient

$$\lambda = xI , \quad \mu = x'I + y'J , \quad \gamma = z''K ,$$

il en résulte

$$V\lambda\mu = xy'K ,$$

il suffit donc de poser $xy' = z''$ pour que $V\lambda\mu = \gamma$.

Cela étant, on pose

$$\varphi(\rho) = V\lambda\mu ,$$

d'où

$$S\lambda\varphi(\rho) = S\lambda V\lambda\mu = S\lambda(\lambda\mu - S\lambda\mu)$$

or

$$\lambda(\lambda\mu - S\lambda\mu) = \lambda^2\mu - \lambda S\lambda\mu ,$$

Or $\lambda^2\mu$ et $\lambda S\lambda\mu$ sont des vecteurs.

On a donc

$$S\lambda\varphi(\rho) = 0 ,$$

et de même

$$S\mu\varphi(\rho) = 0 .$$

Mais

$$S\lambda\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\lambda) \ , \quad S\mu\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\mu) \ ,$$

donc

$$S\rho\varphi'(\lambda) = 0 \ , \qquad S\rho\varphi'(\mu) = 0 \ ,$$

ce qui prouve que le vecteur ρ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\varphi'(\lambda)$, $\varphi'(\mu)$ et par suite

$$m\rho = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \tag{7}$$

m désignant un scalaire.

Si l'on sait résoudre l'équation (6), on en tirera $\rho = \psi(\gamma)$. On peut donc définir ψ comme étant la fonction inverse de φ et poser $\psi = \varphi^{-1}$, ce qui permet d'écrire l'équation (7) de cette façon:

$$m\varphi^{-1}(\gamma) = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \ ,$$

ou encore

$$m\varphi^{-1}(V\lambda\mu) = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \ . \tag{7'}$$

7. *Calcul du scalaire m.* — De (7) on tire

$$m\varphi'(\nu)\rho = \varphi'(\nu)V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)$$

en désignant par ν un vecteur non coplanaire avec λ et μ.

Le second membre peut s'écrire ainsi:

$$\varphi'(\nu)\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) - \varphi'(\nu)S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)$$

Ce second terme est un vecteur, donc en égalant les scalaires des deux membres de l'équation précédente, on a:

$$mS\varphi'(\nu)\rho = S\varphi'(\nu)\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) = S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)$$

D'autre part,

$$S\varphi'(\nu)\rho = S\rho\varphi'(\nu) = S\nu\varphi(\rho) = S\nu V\lambda\mu \ ,$$

donc,

$$S\varphi'(\nu)\rho = S\lambda\mu\nu \ ,$$

ce qui donne

$$m = \frac{S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)}{S\lambda\mu\nu} \ .$$

Il s'agit de prouver que m est un invariant. Remplaçons le trièdre λ, μ, ν par un autre λ', μ', ν' de façon que

$$\begin{aligned} \lambda' &= a\lambda + b\mu + c\nu \\ \mu' &= a'\lambda + b'\mu + c'\nu \\ \nu' &= a''\lambda + b''\mu + c''\nu \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

on a (2)

$$S\lambda'\mu'\nu' = S\lambda\mu\nu x\,\Delta\ .$$

d'autre part:

$$\varphi'(\lambda') = \Sigma V r(a\lambda + b\mu + c\nu)\ ,\ = a\Sigma V r\lambda q + b\Sigma V r\mu q + c\Sigma V r\nu q\ ,$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(\lambda') = a\varphi'(\lambda) + b\varphi'(\mu) + c\varphi'(\nu)\ ,$$

et de même:

$$\begin{aligned} \varphi'(\mu') &= a'\varphi'(\lambda) + b'\varphi'(\mu) + c'\varphi'(\nu)\ , \\ \varphi'(\nu') &= a''\varphi'(\lambda) + b''\varphi''(\mu) + c''\varphi'(\nu)\ , \end{aligned}$$

et ces formules restent vraies si l'on remplace φ par φ_1. On a donc aussi

$$S\varphi'(\lambda')\varphi'(\mu')\varphi'(\nu') = S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu) \times \Delta\ ,$$

donc m ne change pas

On peut profiter de cette remarque pour avoir un calcul plus simple: à cet effet, on peut remplacer λ, μ, ν par i, j, k et l'on en déduit

$$m = -S\varphi'(i)\varphi'(j)\varphi'(k)$$

et en remplaçant m par cette expression dans (7) on a la solution du problème proposé.

8. Hamilton a obtenu une formule débarrassée des vecteurs λ, μ, ν.

Remplaçons φ par $\varphi + h$. Comme nous l'avons expliqué au N° 5, ce qui signifie que nous remplaçons $\varphi(\rho)$ par $\varphi_1(\rho)$ ou $\varphi(\rho) + h\rho$. Supposons encore $\varphi_1(\rho) = \gamma = V\lambda\mu$, λ et μ n'étant pas nécessairement les mêmes que plus haut. En procédant comme au n° précédent, nous obtiendrons :

$$m_h\rho = V\varphi_1'(\lambda)\varphi_1'(\mu)$$

m_h désignant ce qu'est devenu le scalaire m après ce changement. On aura d'ailleurs

$$m_h = \frac{S\varphi_1'(\lambda)\varphi_1'(\mu)\varphi_1'(\nu)}{S\lambda\mu\nu}$$

et, quel que soit h, m_h reste invariable quand on remplace λ, μ, ν par λ', μ', ν' comme plus haut,

On a donc

$$m_h = \frac{S(\varphi'(\lambda) + h\lambda)(\varphi'(\mu) + h\mu)(\varphi'(\nu) + h\nu)}{S\lambda\mu\nu},$$

c'est-à-dire

$$m_h = m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3,$$

où m, m_1, m_2 sont des invariants, puisque m_h est invariant, quel que soit h.

D'ailleurs

$$m_1 = \frac{S(\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\nu + \varphi'(\lambda)\mu\varphi'(\nu) + \lambda\varphi'(\mu)\nu)}{S\lambda\mu\nu}$$

$$m_2 = \frac{S(\lambda\mu\varphi'(\nu) + \varphi'(\lambda)\mu\nu + \lambda\varphi'(\mu)\nu)}{S\lambda\mu\nu}$$

et dans ces formules, on pourrait remplacer λ, μ, ν, par i, j, k.

Cela étant, la formule

$$m_h\rho = V\varphi_1'(\lambda)\varphi_1'(\mu)$$

développée, donne

$$m_h\rho = V(\varphi'(\lambda) + h\lambda)(\varphi'(\mu) + h\mu),$$

c'est-à-dire:

$$m_h\rho = V[\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) + h(\varphi'(\lambda)\mu + \lambda\varphi'(\mu)) + h^2\lambda\mu]$$

mais

$$V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) = m\rho = m\varphi^{-1}(\gamma),$$

$$V\lambda\mu = \gamma.$$

Posons

$$V[\varphi'(\lambda)\mu + \lambda\varphi'(\mu)] = X.$$

ce qui nous permet d'écrire

$$m_h\rho = m\varphi^{-1}(\gamma) + hX + h^2\gamma.$$

Multiplions les deux membres, à gauche, par φ_1 ou $\varphi + h$, ce qui nous donne dans le premier membre:

$$m_h \varphi_1(\rho) \qquad \text{ou} \qquad m_h \gamma \ ,$$

c'est-à-dire:

$$(m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3)\gamma \ .$$

Calculons ce que devient le second membre.

Le premier terme devient:

$$m(\varphi + h)\varphi^{-1}(\gamma) \ ,$$

ce qui signifie

$$m\varphi(\varphi^{-1}(\gamma)) + mh\varphi^{-1}(\gamma) \ ,$$

ou, plus simplement:

$$m\gamma + mh\varphi^{-1}(\gamma) \ .$$

Le second terme donne:

$$h(\varphi + h)\mathrm{X} \qquad \text{ou} \qquad h\varphi(\mathrm{X}) + h^2\mathrm{X} \ ,$$

enfin, le troisième terme devient:

$$(\varphi + h)h^2\gamma = h^2\varphi(\gamma) + h^3\gamma \ .$$

On a ainsi:

$$(m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3)\gamma \equiv (m + h^3)\gamma + h(m\varphi^{-1}(\gamma) + \varphi(\mathrm{X}) + h^2[\mathrm{X} + \varphi(\gamma)] \ .$$

Si l'on égale les coefficients de h^2, on trouve

$$m_2\gamma = \mathrm{X} + \varphi(\gamma) \ .$$

Donc, X est une fonction linéaire de γ et l'on peut poser

$$\mathrm{X} = \psi(\gamma) = m_2\gamma - \varphi(\gamma)$$

ou, symboliquement:

$$\psi(\gamma) = (m_2 - \varphi)\gamma \ ,$$

ou encore $\psi = m_2 - \varphi$.

Egalons maintenant les coefficients de h; nous aurons

$$m_1 = m\varphi^{-1} + \varphi(\psi) \ .$$

ou

$$m_1 = m\varphi^{-1} + \varphi(m_2 - \varphi) \ ,$$

Ce qui donne enfin:

$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2 ,$$

ou, sous forme plus explicite:

$$m\bar{\varphi}'(\gamma) = m_1\gamma - m_2\varphi(\gamma) + \varphi(\varphi(\gamma)) . \tag{8}$$

Telle est la formule d'Hamilton.

Application et vérification.

Exemple. — Déterminer ρ par la condition

$$V\alpha\rho\beta = \gamma$$

α, β, γ étant des vecteurs.

Dans ce cas:

$$\varphi(\rho) = V\alpha\rho\beta = \alpha S\beta\rho - \rho S\alpha\beta + \beta S\alpha\rho = V\beta\rho\alpha$$

donc

$$\varphi'(\rho) = \varphi(\rho) .$$

Par suite:

$$\varphi'(\lambda) = V\alpha\lambda\beta , \qquad \varphi'(\mu) = V\alpha\mu\beta , \qquad \varphi'(\gamma) = V\alpha\nu\beta .$$

Pour calculer m nous remplacerons λ, μ, ν par α, β, γ respectivement.

Alors:

$$\begin{array}{lll} V\alpha\lambda\beta & \text{devient} & V\alpha^2\beta = \alpha^2\beta \\ V\alpha\mu\beta & \text{devient} & V\alpha\beta^2 = \alpha\beta^2 \\ V\alpha\nu\beta & \text{devient} & V\alpha\gamma\beta . \end{array}$$

Le numérateur de m devient donc:

$$S\alpha^2\beta . \alpha\beta^2 V\alpha\gamma\beta ,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2\beta^2 S\beta\alpha V\alpha\gamma\beta .$$

Or,

$$\beta\alpha V\alpha\gamma\beta = \beta\alpha(\alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\alpha\gamma) ,$$

$\alpha^2\beta S\gamma\beta$ et $\beta^2\alpha S\alpha\gamma$ sont des vecteurs. Il reste

$$-\alpha^2\beta^2 S\beta\alpha\gamma S\alpha\beta$$

ou

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma ;$$

le dénominateur devenant $S\alpha\beta\gamma$, on a finalement

$$m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta$$

et, par suite

$$\rho . \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = V\varphi(\lambda)\varphi(\mu) .$$

Pour appliquer la dernière formule d'Hamilton, calculons m_1 et m_2.

En remplaçant λ, μ, ν par α, β, γ on a:

$$m_1 = \frac{S[\alpha\varphi(\beta)\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\beta\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\gamma]}{S\alpha\beta\gamma} .$$

Nous savons déjà que

$$\rho(\alpha) = \alpha^2\beta , \qquad \varphi(\beta) = \alpha\beta^2 , \qquad \varphi(\gamma) = V\alpha\gamma\beta$$

en faisant les substitutions, le numérateur devient

$$S[2\alpha^2\beta^2 V\alpha\gamma\beta + \alpha\beta^2\gamma] = S\alpha^2\beta^2\beta\alpha\gamma = -\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\gamma$$

donc $m_1 = -\alpha^2\beta^2$,

Ensuite,

$$m_2 = \frac{S[\alpha\beta\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\beta\gamma + \alpha\rho(\beta)\gamma]}{S\alpha\beta\gamma} .$$

Le numérateur se réduit à $S\alpha\beta V\alpha\gamma\beta$ et, en remplaçant $V\alpha\gamma\beta$ par $\alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\gamma$ on obtient simplement

$$-S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma ,$$

d'où

$$m_2 = -S\alpha\beta .$$

La formule (8) donne

$$\rho . \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = -\alpha^2\beta^2\gamma + S\alpha\beta . V\alpha\gamma\beta + V(\alpha . V\alpha\gamma\beta . \beta) .$$

Mais,

$$\alpha V\alpha\gamma\beta . \beta = \alpha^2\beta S\beta\gamma - \alpha\gamma\beta S\alpha\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma$$

et par suite

$$V(\alpha V\alpha\gamma\beta . \beta) = \alpha^2\beta S\beta\gamma - V\alpha\gamma\beta S\alpha\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\rho . \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = -\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\beta S\beta\gamma + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma$$

et enfin, en divisant les deux membres par $\alpha^2\beta^2$:

$$\rho S\alpha\beta = -\gamma + \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma .$$

Cette équation peut être obtenue directement. En effet, de l'équation donnée:

$$V\alpha\rho\beta = \gamma ,$$

on tire

$$S\alpha V\alpha\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$S.\alpha(\alpha\rho\beta - S\alpha\rho\beta) = S\alpha\gamma$$

$\alpha S\alpha\rho\beta$ étant un vecteur, on a simplement

$$\alpha^2 S\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$\alpha S\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma ,$$

de même

$$\beta S\rho\alpha = \beta^{-1} S\beta\gamma ,$$

ce qui donne

$$\gamma = V\alpha\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \rho S\alpha\beta$$

et l'on retrouve bien l'équation obtenue en appliquant la formule d'Hamilton.

TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT AIENT UN RAPPORT CONSTANT

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Soit $\rho = f(s)$ l'équation de la courbe cherchée, s désignant l'arc. Nous représenterons la courbure et la torsion en un point M par les lettres c et c_1. On trouve aisément

$$S\rho'\rho'' = 0 , \qquad T\rho' = 1 , \qquad T\rho'' = c ,$$

et

$$\rho'\rho'' = c\alpha , \tag{1}$$