TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT AIENT UN RAPPORT CONSTANT

Autor(en): **Niewenglowski, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515764

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cette équation peut être obtenue directement. En effet, de l'équation donnée:

$$V\alpha\rho\beta = \gamma ,$$

on tire

$$S\alpha V\alpha\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$S.\alpha(\alpha\rho\beta - S\alpha\rho\beta) = S\alpha\gamma$$

$\alpha S\alpha\rho\beta$ étant un vecteur, on a simplement

$$\alpha^2 S\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$\alpha S\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma ,$$

de même

$$\beta S\rho\alpha = \beta^{-1} S\beta\gamma ,$$

ce qui donne

$$\gamma = V\alpha\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \rho S\alpha\beta$$

et l'on retrouve bien l'équation obtenue en appliquant la formule d'Hamilton.

TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT AIENT UN RAPPORT CONSTANT

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Soit $\rho = f(s)$ l'équation de la courbe cherchée, s désignant l'arc. Nous représenterons la courbure et la torsion en un point M par les lettres c et c_1. On trouve aisément

$$S\rho'\rho'' = 0 , \qquad T\rho' = 1 , \qquad T\rho'' = c ,$$

et

$$\rho'\rho'' = c\alpha , \tag{1}$$

α désignant un vecteur-unité perpendiculaire au plan osculateur en M. On a donc:

$$\alpha = \frac{\rho'\rho''}{c} = \frac{\rho'\rho''}{T\rho''} ,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\rho'\rho''}{T\rho''}\right) . \tag{2}$$

Mais en remarquant que $\frac{d\alpha}{ds}$ est parallèle à ρ'' on a:

$$\frac{d\alpha}{ds} = c_1 \frac{\rho''}{T\rho''} = nc \frac{\rho''}{T\rho''} = n\rho'' , \tag{3}$$

et en intégrant

$$\frac{\rho'\rho''}{T\rho''} = n\rho' + a , \tag{4}$$

n désignant le rappotr $\frac{c_1}{c}$ et a un vecteur invariable. Nous poserons $a = \lambda h$, λ désignant un vecteur unité constant.

Dans (4) le tenseur du premier membre est égal à 1; donc

$$(n\rho' + a)^2 = -1 ,$$

Ce qui donne

$$2nhS\lambda\rho' = n^2 + h^2 - 1 .$$

Il en résulte que $S\lambda\rho'$ est constant; ce qui exprime que la tangente à la courbe cherchée en un point quelconque M, fait un angle constant avec une droite de direction invariable. La courbe est donc une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

Remarque. — Les relations d'où nous sommes partis peuvent s'établir très facilement par la géométrie analytique.

RÉCIPROQUEMENT. — *Dans toute hélice le rapport* n *est constant.*

Prenons l'arc des z parallèle aux génératrices du cylindre qui porte l'hélice et supposons l'origine de l'arc s dans le plan xoy, les exas étant, bien entendu, supposés rectangulaires. L'équation de l'hélice peut s'écrire:

$$\rho = ix + jy + kls ,$$

x et y étant des fonctions de s. En prenant les dérivées par rapport à s,

$$\rho' = ix' + jy' + kl .$$

La condition $T\rho' = 0$ donne:

$$x'^2 + y'^2 + l^2 = 1 .$$

Si l'on pose $1 - l^2 = p^2$, on pourra écrire

$$x' = p \cos \varphi \qquad y' = p \sin \varphi ,$$
$$\rho' = ip \cos \varphi + jp \sin \varphi + kl ,$$
$$\rho'' = (- i \sin \varphi + j \cos \varphi) p \varphi' ,$$

donc

$$c = T\rho'' = p\varphi' ,$$
$$\alpha = \frac{\rho' \rho''}{c} = - il \cos \varphi - jl \sin \varphi + kp ,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{ds} = (i \sin \varphi - j \cos \varphi) l \varphi' . \tag{5}$$

D'ailleurs, l'équation (3) donne

$$\frac{d\alpha}{ds} = n\rho'' = n(- i \sin \varphi + j \cos \varphi) p \varphi' . \tag{6}$$

En comparant (5) et (6) on a donc $n = -\frac{l}{p}$ et par suite le rapport $\frac{c_1}{c}$ est constant. *c. q. f. d.*