VI

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

V

Avant d'indiquer les problèmes les plus intéressants que pose la notion du groupe d'holonomie, il ne sera pas inutile de faire une remarque relative aux transformations infinitésimales de ce groupe. Il est évident que parmi ces dernières se trouvent les transformations associées aux contours fermés *infiniment petits* (dans tous les sens) tracés dans l'espace non holonome donné. On peut démontrer rigoureusement que si toutes ces transformations étaient nulles, le groupe d'holonomie se réduirait à la transformation identique. Or les géométries non holonomes les plus importantes dans les applications sont celles pour lesquelles les transformations infinitésimales associées aux contours fermés infiniment petits partant d'un point *laissent ce point invariant.* Comme je l'ai proposé, on peut convenir de dire que les espaces non holonomes correspondants sont *sans torsion.* Il en est ainsi des espaces de M. Weyl et des espaces d'Eddington. Il en est ainsi également des espaces de Riemann à parallélisme de Levi-Civita: on peut même caractériser complètement le parallélisme de M. Levi-Civita par *la condition de priver l'espace de toute torsion.*

On conçoit que l'absence de torsion ait sa répercussion sur la nature du groupe d'holonomie, ce groupe, dans le cas où il ne se réduit pas à la transformation identique, devant admettre une transformation infinitésimale non identique laissant invariant un point arbitraire.

VI

Je ne citerai que pour mémoire le problème de la détermination du groupe d'holonomie d'un espace non holonome donné à groupe fondamental G. Il peut être résolu complètement dès qu'on connaît tous les types de sous-groupes de G.

Dans la théorie des équations algébriques, on sait qu'il existe toujours des équations algébriques admettant un groupe de Galois donné à l'avance. Il existe toujours d'une manière analogue des espaces non holonomes à groupe fondamental G ad-

mettant pour groupe d'holonomie un sous-groupe arbitrairement donné de G. Il existe par exemple des espaces à connexion euclidienne dont le groupe d'holonomie est le groupe des translations; mais ce ne sont pas des espaces de Riemann (à connexion de Levi-Civita). L'absence de torsion d'un espace de Riemann restreint en effet, comme nous l'avons dit plus haut, la nature des groupes d'holonomie possibles, et c'est un problème intéressant que de déterminer, pour chaque nombre de dimensions de l'espace, tous ces groupes d'holonomie. Je me contente d'indiquer la solution de ce problème pour $n = 2$ et $n = 3$. Les espaces de Riemann à deux dimensions qui ne sont pas holonomes ne peuvent admettre comme groupe d'holonomie que le groupe à trois paramètres de tous les déplacements. Quant aux espaces de Riemann à trois dimensions, le groupe d'holonomie peut être:

Soit le groupe à 6 paramètres de tous les déplacements (cas général);

Soit le groupe à 5 paramètres qui laisse invariante une direction isotrope fixe (ds^2 réductible à la forme $dz^2 + 2dx\,dy + \mathrm{H}(x,y,z)\,dx^2$);

Soit le groupe à 3 paramètres qui laisse invariant un point fixe (ds^2 réductible à la forme $dz^2 + z^2 d\sigma^2$, où $d\sigma^2$ ne dépend que de deux variables x, y);

Soit le groupe à 3 paramètres qui laisse invariant un plan fixe ainsi que tous les plans parallèles (ds^2 réductible à la forme $dz^2 + d\sigma^2$, ou, dans le cas où le plan est isotrope, $dz^2 + 2dx\,dy + \mathrm{H}(x,z)\,dx^2$).

A côté des espaces de Riemann, deux autres catégories d'espaces non holonomes sont particulièrement intéressantes. Si, au lieu de considérer un ds^2 donné, on considère une équation $ds^2 = o$, il est possible d'une infinité de manières d'attribuer à l'espace une connexion conforme de manière que les lignes de longueur nulle de l'espace soient précisément les courbes définies par l'équation donnée. Parmi cette infinité de connexions conformes, il en est une privilégiée qui jouit de propriétés particulièrement simples et que j'ai proposé d'appeler normale[1]; les espaces con-

[1] E. Cartan. *Les espaces à connexion conforme* (Ann. de la Soc. polon. de math., 1923, p. 171-221).

formes non holonomes *normaux* jouent par rapport à la géométrie conforme le rôle des espaces de Riemann avec parallélisme de Levi-Civita par rapport à la géométrie euclidienne. En particulier les espaces non holonomes conformes normaux à trois dimensions sont caractérisés par la condition que la transformation conforme associée à un contour fermé infiniment petit partant d'un point A laisse invariant ce point, ainsi que toutes les directions qui en sont issues. On déduit facilement de là que les seuls groupes d'holonomie possibles des espaces conformes normaux à trois dimensions sont:

1° Le groupe conforme général à 10 paramètres;

2° Le sous-groupe invariant à 6 paramètres du groupe qui conserve une droite isotrope fixe; dans ce second cas l'équation qui donne les lignes de longueur nulle est réductible à la forme $dz^2 + 2dx\,dy + \mathrm{H}(x, z)\,dx^2 = 0$, et l'on a par une quadrature un invariant intégral linéaire absolu des équations différentielles des lignes qui jouent le rôle des droites isotropes.

Une autre catégorie importante d'espaces non holonomes est liée à la considération des géodésiques d'un espace à connexion affine. Les équations différentielles de ces géodésiques sont d'une forme particulière, à savoir, pour $n = 2$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{dy}{dx} + \mathrm{C}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \mathrm{D}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Cela posé, si on se donne *a priori* un système d'équations différentielles de cette forme, il existe une infinité de connexions projectives telles que l'espace projectif non holonome qu'elles définissent admette les courbes données pour géodésiques; mais, parmi toutes ces connexions projectives, il en est une privilégiée, dite normale[1]. Les espaces non holonomes projectifs normaux sont à un système différentiel donné de géodésiques ce que les espaces de Riemann sont à un ds^2 donné. Pour $n = 2$, ils sont caractérisés par la propriété que la transformation projective associée à un contour fermé infiniment petit partant d'un point A laisse invariant le point A, ainsi que toutes les droites issues

[1] E. CARTAN. *Sur les variétés à connexion projective* (Bull. Soc. math. de France, 52, 1924, p. 205-241).

de A. D'après cela, les seuls groupes d'holonomie possibles sont pour $n = 2$:

1. Le groupe projectif général à 8 paramètres;

2. Le sous-groupe invariant à 6 paramètres du groupe qui laisse invariant un point fixe; dans ce cas l'équation différentielle des géodésiques, au lieu d'être de la forme générale indiquée ci-dessus, est réductible à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x, y) ;$$

mais on peut, sans faire la réduction, obtenir par une quadrature un multiplicateur de Jacobi de cette équation.

Je citerai enfin, comme dernier exemple, le cas des espaces réels de Weyl à trois dimensions, en supposant le ds^2 défini positif. Si le groupe d'holonomie n'est pas un sous-groupe du groupe des déplacements, il est, soit le groupe de toutes les similitudes (cas général), soit le groupe des déplacements et des similitudes qui laissent invariante une direction fixe; dans ce cas les deux formes, quadratique et linéaire, qui définissent l'espace, sont:

$$ds^2 = dz^2 + H(x, y, z)(dx^2 + dy^2) , \qquad \omega = -\frac{\partial \log H}{\partial z} dz .$$

VII

J'aborde une dernière question, extrêmement intéressante. On sait le rôle que joue la théorie des groupes comme principe de subordination dans les géométries (holonomes) à groupe fondamental. La géométrie élémentaire, par exemple, se subordonne à la géométrie projective en ce sens que les propriétés euclidiennes d'une figure sont tout simplement les propriétés projectives de la figure plus complète formée par la figure donnée et le cercle imaginaire de l'infini; la géométrie élémentaire est au fond un simple chapitre de la géométrie projective, et cela tient à ce que le groupe fondamental de la première est un sous-groupe du groupe fondamental de la seconde. Il convient d'insister sur ce fait que l'espace projectif peut être, d'une infinité de manières