III. — Droite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

III. — Droite.

1. — Une droite quelconque A et la droite ${}^{i}\underline{C}$ déterminent une figure linéaire. La trace de cette figure sur π sera dite la *i-ième projection* A_i de la droite A. En supposant les droites A, ${}^{1}\underline{C}$, ${}^{2}\underline{C}$, non sécantes, on obtient les droites A_i. A_1 et A_2 ne déterminent pas A d'une manière uniforme, car les espaces $({}^{1}\underline{C}A)$ et $({}^{2}\underline{C}A)$ se rencontrent suivant un plan.

La projection A_i *d'une droite* A *est une droite en général, mais les projections* A_1, A_2 *ne déterminent pas la droite d'une manière uniforme.*

Supposons une série linéaire A $(a, b, \ldots)$ des points sur A. Les rayons projetants (aa_i), (bb_i), (cc_i), ... qui sont en général des génératrices d'une quadrique gauche, font correspondre à A $(a, b, \ldots)$ une série projective A_i $(a_i, b_i, \ldots)$ $[A(a, b, \ldots) \overline{\wedge} A_i (a_i, b_i \ldots)]$. Or, parce qu'on a $A(a, b, \ldots) \overline{\wedge} A_1 (a_1, b_1, \ldots)$ et $A (a, b, \ldots) \overline{\wedge} A_2 (a_2, b_2, \ldots)$, il s'en suit aussi

$$A_1 (a_1, b_1, c_1 \ldots) \overline{\wedge} A_2 (a_2, b_2, c_2 \ldots) .$$

L'enveloppe des droites de rappel (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), ... est donc une conique, mais, parce que les projections du point impropre de A sont à l'infini, cette conique est une parabole:

A chaque droite A *appartient une parabole* P_A, *enveloppe des rayons de rappel* $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, ... *Les projections* A_1, A_2 et *la parabole* P_A *déterminent la droite d'une manière uniforme.*

2. — *Positions exceptionnelles.*

A. *Droite sécante* ${}^{i}\underline{C}$. En ce cas la i-ième projection de A est un point A_i qui est la trace du plan $({}^{i}\underline{C}A)$ sur π. On a donc pour $i = 2$: *La deuxième projection d'une droite* A, *orthogonale à* π *est un point* A_2.

B. *Droite sécante* π. L'espace $\mathbf{A} \equiv (A\pi)$, a un point commun ${}^{i}\underline{c}$ avec ${}^{i}\underline{C}$. On peut donc appliquer la méthode élémentaire de projection à l'aide de deux centres impropres ${}^{1}\underline{c}$, ${}^{2}\underline{c}$. $({}^{1}\underline{c}_2 \equiv {}^{2}\underline{c}_1)$.

La parabole appartenant à une droite sécante π *dégénère en un faisceau de rayons parallèles.*

C. *Droite impropre.* Supposons tout d'abord une droite $\underline{A}$ qui ne rencontre ni ${}^{1}\underline{C}$ ni ${}^{2}\underline{C}$. Dans ce cas on a

$$\underline{A}_1 (\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1, \ldots) \overline{\wedge} \underline{A}_2 (\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \ldots) \text{ sur } {}^{0}\underline{C}.$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries représente les projections confondues d'une sécante aux quatre droites $\underline{A}$, ${}^2\underline{C}$, ${}^1\underline{C}$, ${}^0\underline{C}$.

La i-ième projection d'une droite $\underline{A}$ qui s'appuie sur ${}^i\underline{C}$ est le point d'intersection de deux plans $(\underline{A}\,{}^i\underline{C})$ et π. La série $\underline{A}_i\,(\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i \ldots)$ se réduit au point $\underline{A}_i$. Une droite $\underline{A}$ qui s'appuie et sur ${}^1\underline{C}$ et sur ${}^2\underline{C}$ ne nous présente que deux points $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ distincts, si elle n'est pas une des droites projetantes, confondus dans le cas contraire.

3. — *Deux droites* A et A′ sont concourantes au point x, si le rayon de rappel $(x_1 x_2)$ $[x_i \equiv A_i A'_i]$ est tangent aux paraboles P_A et $P_{A'}$. Il s'en suit pour deux droites parallèles d'après II.2:

Deux droites sont parallèles, lorsque leurs projections du même nom sont parallèles. On se sert de ce théorème pour résoudre facilement le problème de la distance de deux points a, b sur A. On mène une droite $A' // A$ par un point quelconque de π, et on projette parallèlement la série $A\,(a, b, \ldots)$ sur $A'\,(a', b', \ldots)$. Maintenant on peut procéder sur A′ dans l'espace $(A'\,\pi)$ ce qui est un problème élémentaire.

Deux droites A, B, dont $A_1 \equiv B_1$, $A_2 \equiv B_2$, sont situées dans un même plan. Ce plan est l'intersection de deux espaces $({}^1CA) \equiv ({}^1CB)$ et $({}^2CA) \equiv ({}^2CB)$. La quatrième tangente commune de deux paraboles P_A, P_B est le rayon de rappel $(x_1 x_2)$ du point d'intersection $x \equiv (AB)$.

Deux droites A, B, $A_1 \not\equiv B_1$, $A_2 \not\equiv B_2$ avec la parabole commune P_{AB} n'ont aucun point commun.

4. — *Deux droites impropres.* Le cas échéant on a

$$\left.\begin{array}{l} \underline{A}_1\,(\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1, \ldots) \barwedge \underline{A}_2\,(\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \ldots) \\ \underline{A}'_1\,(\underline{a}'_1, \underline{b}'_1, \underline{c}'_1, \ldots) \barwedge \underline{A}'_2\,(\underline{a}'_2, \underline{b}'_2, \underline{c}'_2, \ldots) \end{array}\right\} \text{sur } {}^0\underline{C}\ .$$

Or, en posant

$$\underline{A}_i\,(\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i, \ldots) \equiv \underline{A}'_i\,(\underline{a}'_i, \underline{b}'_i, \underline{c}'_i, \ldots)$$

on obtient

$$\underline{A}_k\,(\underline{a}_k, \underline{b}_k, \underline{c}_k, \ldots) \barwedge \underline{A}'_k\,(\underline{a}'_k, \underline{b}'_k, \underline{c}'_k, \ldots)\ .$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries projectives représente la k-ième projection d'une de deux sécantes communes

à quatre droites $(\underline{AA'}\,{}^k\underline{C}\,{}^0\underline{C})$. Si $\underline{A}$ et $\underline{A'}$ sont concourantes, on ne peut mener qu'une sécante commune à $(\underline{AA'}\,{}^k\underline{C}\,{}^0\underline{C})$. Sa k-ième projection est en même temps la k-ième projection du point d'intersection $\underline{x} \equiv (\underline{AA'})$. Les séries mentionnées sont liées par la projectivité parabolique, parce qu'elles n'ont qu'un point double $\underline{x}_k$.

Si les droites $\underline{A}$ *et* $\underline{A'}$ *sont concourantes, les séries* $\underline{A}_k\,(\underline{a}_k, \underline{b}_k, \underline{c}_k, \ldots) \barwedge \underline{A}'_k\,(\underline{a}'_k, \underline{b}'_k, \underline{c}'_k, \ldots)$ *sont paraboliquement projectives.*

IV. — Plan.

1. — *Triangle caractéristique.* Désignons par α_i la i-ième projection du plan α, c'est-à-dire l'ensemble de i-ièmes projections de tous ses points. Le plan α est déterminé par deux droites D, D′ concourantes au point p. Nous avons démontré (III, 1) la relation

$$\left.\begin{array}{l} D'_1(a'_1, b'_1, c'_1, \ldots p_1, \ldots) \barwedge D'_2(a_2, b'_2, c'_2 \ldots p_2, \ldots) \\ D_1(a_1, b_1, c_1, \ldots p_1, \ldots) \barwedge D_2(a_2, b_2, c_2, \ldots p_2, \ldots) \end{array}\right. \quad \text{Il s'en suit } \alpha_1 \barwedge \alpha_2 .$$

Les champs α_1 et α_2 sont projectifs. On a donc trois points doubles (distincts en général): x_{12}, y_{12}, z_{12}. Nous appelons le triangle $x_{12}\,y_{12}\,z_{12}$ *triangle caractéristique* du plan α. Deux de ses sommets sont à l'infini. Ils nous représentent les projections (confondues) de deux sécantes communes à $\underline{A}\,{}^0\underline{C}\,{}^1\underline{C}\,{}^2\underline{C}$ ($\underline{A}$ est droite impropre du plan α). Le troisième $x \equiv x_1 \equiv x_2$ est le point d'intersection de deux plans π et α.

La droite $\underline{X}_i \equiv (\underline{y}_i \underline{z}_i)$ est en même temps la i-ième projection de la congruence linéaire de droites qui s'appuient sur les rayons projetants des points $\underline{y}$ et $\underline{z}$. Il s'en suit que le triangle $\underline{x}\underline{y}_{12}\underline{z}_{12}$ ne détermine pas d'une manière uniforme le plan α. Il nous faut encore un point quelconque pour le déterminer. La droite (ax) a un point commun avec l'espace $({}^1\underline{C}\,{}^2\underline{C})$. On mène par ce point l'unique rayon possible de la congruence mentionnée et on le considère comme rayon impropre du plan α:

Le plan est fixé par le triangle caractéristique x_{12}, y_{12}, z_{12} *et un de ses points.*

Indiquons par $\underline{X}_{12}$, Y_{12}, Z_{12}, les droites $(\underline{y}_{12}, \underline{z}_{12})$, $(\underline{z}_{12}, \underline{x}_{12})$,