Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LES RECHERCHES RÉCENTES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Autor: Cartan, E.

Kapitel: VII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515748

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de A. D'après cela, les seuls groupes d'holonomie possibles sont pour $n = 2$:

1. Le groupe projectif général à 8 paramètres;

2. Le sous-groupe invariant à 6 paramètres du groupe qui laisse invariant un point fixe; dans ce cas l'équation différentielle des géodésiques, au lieu d'être de la forme générale indiquée ci-dessus, est réductible à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x, y) ;$$

mais on peut, sans faire la réduction, obtenir par une quadrature un multiplicateur de Jacobi de cette équation.

Je citerai enfin, comme dernier exemple, le cas des espaces réels de Weyl à trois dimensions, en supposant le ds^2 défini positif. Si le groupe d'holonomie n'est pas un sous-groupe du groupe des déplacements, il est, soit le groupe de toutes les similitudes (cas général), soit le groupe des déplacements et des similitudes qui laissent invariante une direction fixe; dans ce cas les deux formes, quadratique et linéaire, qui définissent l'espace, sont:

$$ds^2 = dz^2 + H(x, y, z)(dx^2 + dy^2) , \qquad \omega = -\frac{\partial \log H}{\partial z} dz .$$

VII

J'aborde une dernière question, extrêmement intéressante. On sait le rôle que joue la théorie des groupes comme principe de subordination dans les géométries (holonomes) à groupe fondamental. La géométrie élémentaire, par exemple, se subordonne à la géométrie projective en ce sens que les propriétés euclidiennes d'une figure sont tout simplement les propriétés projectives de la figure plus complète formée par la figure donnée et le cercle imaginaire de l'infini; la géométrie élémentaire est au fond un simple chapitre de la géométrie projective, et cela tient à ce que le groupe fondamental de la première est un sous-groupe du groupe fondamental de la seconde. Il convient d'insister sur ce fait que l'espace projectif peut être, d'une infinité de manières

différentes, regardé comme un espace métrique, car on peut y distinguer n'importe quelle conique non dégénérée qui sera susceptible d'y jouer le rôle du cercle imaginaire de l'infini, ou encore n'importe quelle quadrique non dégénérée (et alors on aura un espace non euclidien ou cayleyen).

D'une manière générale tout espace holonome à groupe fondamental G peut être regardé comme un espace holonome à groupe fondamental G′ si G′ est un sous-groupe de G.

Existe-t-il quelque chose d'analogue pour les espaces non holonomes ? La réponse à cette question est facile et à peu près évidente:

Pour qu'un espace non holonome à groupe fondamental G *puisse être regardé comme un espace non holonome à groupe fondamental* G′, *il faut et il suffit que son groupe d'holonomie* g *soit* G′ *ou un sous-groupe de* G′.

En particulier un espace à connexion projective à trois dimensions ne peut qu'exceptionnellement être regardé comme un espace métrique; il faut et il suffit pour cela que son groupe d'holonomie laisse invariante soit une conique, auquel cas il sera en général un espace de H. Weyl, soit une quadrique.

Un espace de H. Weyl ne peut être regardé comme un espace de Riemann que si son groupe d'holonomie est le groupe des déplacements (sans homothétie) ou un de ses sous-groupes.

Sans vouloir multiplier les exemples, nous pouvons indiquer une application intéressante à la théorie de la relativité. Dans l'étude de l'Univers physique, on peut porter son attention sur le côté projectif (défini par les trajectoires d'un point matériel abandonné à lui-même), ou sur le côté conforme (défini par les lois de la propagation de la lumière, lesquelles dépendent simplement d'une équation différentielle quadratique $ds^2 = 0$). Plaçons-nous d'abord au premier point de vue. Une première hypothèse est que le système différentiel qui définit les trajectoires mécaniques est de la forme particulière signalée plus haut, c'est-à-dire qu'elles peuvent être regardées comme les géodésiques d'un espace à 4 dimensions à connexion projective. La loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers mécanique, considéré comme espace non holonome projectif normal à 4 dimensions, laisse

invariante une quadrique (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hyperquadrique (2me forme de la loi, avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance des trajectoires.

Si l'on se place au second point de vue, la seule connaissance des lois de propagation de la lumière, supposées définies par une équation de Monge quadratique, permet d'attribuer à l'Univers une connexion conforme normale bien déterminée; la loi de la gravitation dans le vide d'Einstein peut alors s'exprimer ainsi: le groupe d'holonomie de l'Univers optique, considéré comme espace non holonome conforme normal à 4 dimensions, laisse invariante une hypersphère de rayon nul (1re forme de la loi d'Einstein), ou une hypersphère de rayon non nul (2me forme de la loi avec constante cosmologique). Cela revient à dire, dans l'un et l'autre cas, que l'Univers est métrique, et sa métrique se déduit de la seule connaissance de la loi de propagation de la lumière.

Ajoutons enfin que les deux métriques d'Univers déduites, l'une des trajectoires mécaniques, l'autre des lois de propagation de la lumière, coïncident.

VIII

Indiquons en terminant la relation qui existe entre la notion de groupe d'holonomie et la notion de classe d'un espace de Riemann. M. G. Ricci a désigné sous ce nom le plus petit entier k tel que l'espace de Riemann supposé à n dimensions puisse être réalisé par une variété convenablement choisie de l'espace euclidien à $n+k$ dimensions. M. J. A. Schouten a démontré que, dans certains cas très étendus, la classe était égale au nombre de paramètres dont dépend la position finale du corps de vecteurs issus d'un point A, transporté par parallélisme le long d'un contour fermé partant de A. Il est à peu près évident que ce nombre n'est autre que l'ordre du groupe γ qui indique comment le groupe d'holonomie g de l'espace de Riemann transforme entre elles les directions (ou les points à l'infini). Il y aurait lieu de reprendre cette question et de voir si le théo-