Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Tullio Levi-Civita. — Lezioni di Calcolo differenziale assoluto raccolte e compilate dal Dott. Enrico Persico. — 1 vol. in-8° de 314 p. ; prix : 60 lires. Alberto Stock, Rome, 1925.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Tullio LEVI-CIVITA. — **Lezioni di Calcolo differenziale assoluto** raccolte e compilate dal Dott. Enrico Persico. — 1 vol. in-8° de 314 p.; prix: 60 lires. Alberto Stock, Rome, 1925.

On sait que le Calcul différentiel absolu constitue une charpente particulièrement aisée à construire et particulièrement apte à supporter le magnifique édifice des théories einsteiniennes. On le trouve chez Laue, Eddington, Wright, Carmichael, Struik, Marcolongo, Kopff, Juvet, Galbrun, Marais et tant d'autres. Pour Schouten il est le *Ricci-Kalkul.* En fait, il semble surtout devoir ses origines à MM. Ricci et Levi-Civita et il faut se féliciter de ce que ce dernier et célèbre géomètre ait songé à nous en donner une vue d'ensemble.

Les débuts analytiques du Calcul sont essentiellement symétriques; ils reposent sur les propriétés des déterminants fonctionnels et des matrices. Comme la théorie des groupes, ils exigent des notions sur les équations aux différentielles totales, les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles, les méthodes d'intégration de Morera et de Mayer.

Mais l'originalité la plus élégante apparaît avec les fondements algébriques du nouveau Calcul.

Des changements de variables, en un point M de l'espace, ne peuvent évidemment altérer une quantité scalaire telle, par exemple, que la température de M; il y a *invariance.* Il en est de même pour un travail élémentaire mais celui-ci s'exprime à l'aide de composantes vectorielles pour lesquelles il y a *covariance.* Pour les transformations linéaires, l'opposition des formules

$$x_i = c_{ik} x'_k \,, \qquad x'_i = c^{ki} x_k$$

introduit la *contrevariance. Les tenseurs* sont des expressions aussi générales que possible qui peuvent être m fois covariantes et n fois contrevariantes.

Les formes différentielles quadratiques, dont le rôle est fondamental dans la théorie des surfaces, offrent les premiers exemples de propriétés tensorielles; leurs coefficients sont covariants et ont des associés contrevariants qu'on rencontre notamment dans l'évaluation de l'angle de deux directions; de là peuvent naître une foule de tenseurs à significations diverses. Le plus grand intérêt provient du complément apporté à la géométrie intrinsèque de Gauss, sur une surface ou une variété quelconque, par la notion de *déplacement parallèle généralisé* entièrement mise en évidence par M. Levi-Civita. Cette notion, qui correspond analytiquement à la dérivation covariante, est aussi susceptible de définitions purement géométriques; le parallélisme sur une développable se reconnaît au parallélisme ordinaire obtenu par développement de la surface; on peut raisonner de même sur une surface S quelconque à l'aide d'une *courbe de transport* T, tracée sur S, et de la développable circonscrite à S le long de T. Sur une variété quelconque il existe toujours des courbes à tangentes *autoparallèles:* ce sont les *géodésiques.*

La dérivation covariante peut d'abord s'exposer en insistant presque uniquement sur les analogies qu'elle offre avec la dérivation partielle ordinaire; elle conduit notamment à des divergences généralisées d'où naissent les *paramètres différentiels* attachés aux variétés les plus générales. Les propriétés cartésiennes ou *localement géodésiques* peuvent être conservées en géométrie tensorielle précisément en vertu de l'indépendance qu'un

tenseur manifeste, par définition, vis-à-vis des changements de coordonnées. Et ceci est d'une importance capitale pour l'établissement par voie préliminaire euclidienne d'une foule de résultats non euclidiens.

Les *symboles de Riemann* traduisent, à la fois, la non permutabilité des dérivées tensorielles successives et le concept de *courbure* pour variétés à ds^2 quelconque. Ces symboles sont riches en propriétés symétriques; c'est ici que se place, entre autres, la célèbre *identité de Bianchi* susceptible de deux formes différentes et également remarquables. Notons aussi que la courbure d'une variété s'y révèle intrinsèquement dans le transport, par parallélisme généralisé, d'un vecteur suivant un circuit fermé; ceci est d'ailleurs l'occasion de signaler une intéressante formule due à M. J. Pérès, ainsi que les recherches de MM. Schouten et Bompiani d'après lesquelles la courbure s'attache à un cycle comme rapport entre la variation de directions due au parcours cyclique et l'aire du cycle.

Une même variété géométrique peut donner lieu à des métriques distinctes, comme, par exemple, la surface de la Terre suivant qu'on l'étudie sur la Terre même ou sur une carte. Il y a alors des relations remarquables entre les symboles de Christoffel et de Riemann d'où de nouveaux aperçus qui trouvent surtout leur application avec les variétés à courbure constante.

N'oublions pas de mentionner qu'une des idées essentielles utilisées par M. Levi-Civita est d'étudier une variété V_n en la considérant comme plongée dans un espace euclidien à N dimensions, avec $N > n$, mais aussi petit que possible. Alors $N - n$ est la *classe* de V_n. Si la classe est nulle nous sommes partout en géométrie euclidienne et tous les symboles de Riemann sont nuls. Si la classe est égale à *un* nous sommes sinon dans le cas le plus simple du moins dans le premier qui ait véritablement une originalité. On peut alors facilement tenter, pour la V_n, des représentations sphériques de la courbure, ou rechercher si elle n'est pas applicable sur une variété à courbure constante, etc. Enfin la théorie apporte de l'ordre dans celle des congruences, dans celle des rotations de Ricci, elle suggère des *dérivées d'arcs* à propriétés analogues à celles des opérateurs X représentant les transformations infinitésimales des groupes... Quels horizons non-euclidiens et polydimensionnels n'ouvre-t-elle pas à l'œil du géomètre ? Isolée de toute préoccupation physique, elle fait encore mieux ressortir la valeur de l'algorithme einsteinien qui n'a plus, pour ainsi dire, à se démontrer lui-même, mais simplement à s'appuyer sur un monument d'admirable esthétique et de merveilleuse clarté.

A. Buhl (Toulouse).

A. Speiser. — **Klassische Stücke der Mathematik.** — 1 vol. in-8° de 168 pages avec 16 figures, broché 9 fr.—; relié toile, 12 fr.; Art. Institut Orell Füssli, Zürich.

Ce livre est en quelque sorte une anthologie dans le genre de ces collections de morceaux choisis, destinés aux amateurs de musique, et simplifiés parfois au point de vue technique par un virtuose. Le désir de voir surgir, dans le domaine des mathématiques aussi, une collection de ce genre était bien justifié, et il faut savoir gré à M. Speiser d'avoir réalisé ce projet d'une manière si brillante. Il s'est efforcé de mettre en lumière l'objet même des mathématiques et leurs liens avec les autres branches de la science. Il remarque dans sa Préface que le but et la portée des mathématiques