Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Félix Klein. — Gesammelte mathematische Abhandlungen, Dritter Bd., herausgegeben von R. Frigke, H. Vermeil et E. Bessel-Hagen (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen) : Elliptische Funktionen, insbes. Modulfunktionen, Hyperelliptische u. Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie u. Automorphe Funktionen; Anhang, verschiedene Verzeichnisse. — 1 vol. in-8°, X-774-...

Autor: Young, Grace Chisholm

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

sont parfois mal compris, même dans les cercles scientifiques, bien que tout homme cultivé ait suivi des cours de mathématiques pendant au moins douze ans de sa vie.

Les savants dont les écrits ont fourni à M. Speiser les morceaux qui constituent cette collection viennent de toutes les parties de l'Europe. Nous trouvons Archytas, Platon, Aristote — le maître des savants —, Euclide, Archimède, Dante — qu'il rapproche d'une manière fort ingénieuse de Riemann —, Léonard de Vinci, Képler, Gœthe, Descartes, Pascal, les Bernoulli, le père Saccheri, même Jean-Jacques, Euler, Einstein, Sylvester et Hjelmslev, tandis que Le Tintoret apporte sa collaboration par le tableau reproduit en tête du volume.

Nous tenons à féliciter aussi la Maison d'édition Orell Füssli pour tout le soin qu'elle a apporté à l'impression de ce bel ouvrage qui se présente sous une forme à la fois originale et élégante.

GRACE CHISHOLM YOUNG (Lausanne).

FÉLIX KLEIN. — **Gesammelte mathematische Abhandlungen,** Dritter Bd., herausgegeben von R. FRICKE, H. VERMEIL et E. BESSEL-HAGEN (von F. KLEIN mit ergänzenden Zusätzen versehen): Elliptische Funktionen, insbes. Modulfunktionen, Hyperelliptische u. Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie u. Automorphe Funktionen; Anhang, verschiedene Verzeichnisse. — 1 vol. in-8°, X-774-36 p. avec 138 figures; 30 M.; Verlag Julius Springer, Berlin.

Le dernier et le plus intéressant des trois volumes des œuvres de Félix Klein contient les mémoires sur la Théorie des Fonctions qui constituent, selon l'auteur, le couronnement de ses recherches théoriques. La lumière presque éblouissante, projetée par ses œuvres, est due en grande partie au don caractéristique de l'auteur, don que nous avons déjà mentionné (*Enseignement Mathématique*, tome XXII, p. 392), de coordonner les différentes parties de l'édifice mathématique. Avec une virtuosité admirable, Klein emploie tour à tour les méthodes de l'algèbre, de la géométrie, de la théorie des groupes et de la théorie des fonctions analytiques.

S'il fallait choisir les plus intéressants parmi ces mémoires, les recherches sur les fonctions automorphes, y compris les fonctions modulaires, l'emporteraient probablement. Rassemblés en un volume commode et bien imprimé, mis au point par des annotations et parsemés de souvenirs autobiographiques ils offrent un excellent moyen d'acquérir une idée générale de ces fonctions et de leur place dans l'ensemble. Une grande part de l'intérêt qu'ils susciteront aujourd'hui sera concentrée sur la distinction précise entre les rôles de la France et de l'Allemagne dans la découverte de ces fonctions. Cet exposé historique se trouve dans la correspondance échangée entre Klein et Poincaré aux pages 587-622 avec un article sur la préhistoire du sujet, ajouté par Klein.

Les premières Notes de Poincaré sur ce qu'il nomma les *fonctions fuchsiennes* parurent au printemps 1881. Malheureusement il n'était pas versé dans la littérature étrangère du sujet; quoiqu'il lût facilement l'allemand, il n'était pas au courant de l'œuvre fondamentale de Riemann et de Schwarz et des recherches déjà publiées par Klein.

Dans une lettre du 15 juin 1881, Poincaré écrit: « Je vous rendrai justice

à cet égard quand je publierai mes résultats; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des *Mathematische Annalen* qui n'existent pas à la bibliothèque Universitaire de Caen » (p. 590). Et en date du 22 juin: « Aussitôt après l'avoir reçue, j'ai couru à la Bibliothèque pour y demander le 70e volume de Borchardt; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le mémoire de M. Schwarz (p. 593).

Ce serait rendre hommage de la manière la plus efficace à la mémoire de celui qui fut reconnu plus tard comme le mathématicien le plus distingué de son temps, que d'améliorer ses conditions défectueuses, dont lui aussi avait souffert, dans les universités provinciales de France.

Dans ce même ordre d'idées il faut en revanche compter parmi les mérites de Klein d'avoir, suivant les meilleures traditions allemandes, insisté d'emblée auprès de ses élèves sur la nécessité d'un examen consciencieux de la littérature, préalable à l'impression de leurs propres recherches. C'est pour atteindre à cette culture générale, qu'il a créé l'admirable salle de lecture de Goettingue. Il possédait lui-même une mémoire extraordinaire pour les citations, ce qui, joint à sa capacité phénoménale de se saisir d'une idée, nous rendait autrefois ses conseils très précieux. Il n'a jamais émis un jugement plus juste qu'en écrivant à Poincaré (p. 610): « Für mich ist die lebendige Verbindung mit gleichstrebenden Mathematikern immer die Vorbedingung zur eigenen mathematischen Produktion gewesen », et ce qui augmente la valeur de ses annotations personnelles c'est qu'il se souvient des sources de ses travaux et qu'il nous le confie.

Rendu attentif aux lacunes que présentaient, au point de vue de l'histoire, ses Notes sur les fonctions fuchsiennes, Poincaré a du reste noblement reconnu sa dette envers Klein, et, en dépit des protestations de celui-ci, a doté du nom de *fonctions kleiniennes* les autres fonctions uniformes, plus générales, que Klein a bien nommées les *fonctions automorphes*. Ce sont en effet les fonctions, uniformes ou non, qui se reproduisent quand on fait subir aux variables indépendantes un groupe approprié de substitutions linéaires.

La correspondance qui s'ensuivit nous montre ces deux chercheurs enthousiasmés de leur sujet, rivalisant d'efforts pour trouver des théorèmes fondamentaux et pourtant admirant sincèrement leurs œuvres réciproques. Je citerai les phrases suivantes de Poincaré:

Juin 15, 1881. « Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Je n'en suis nullement étonné, car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non-euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe » (pp. 589-90).

Juillet 5, 1881. « Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient comme cas particulier « alle meine Existenzbeweise ». Mais il arrive après (p. 600).

Janvier 1882. « J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressant » (p. 606).

Et de Klein:

« Ich sehe, dass Sie nun wirklich zu einem Beweise gekommen sind (8. August) « que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par des fonctions zétafuchsiennes » und « que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des

fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire. « Indem ich Ihnen dazu gratuliere, dass Sie so weit gekommen sind, möchte ich Ihnen einen Vorschlag machen, der Ihnen und meinen Interessen auf gleiche Weise gerecht wird » (p. 602). Cette proposition fut que Poincaré écrirait un article pour les *Mathematishe Annalen*, ce qu'il a fait en effet. Malheureusement l'état de santé de Klein mit bientôt fin à ce tournoi mathématique.

Un sujet qui intéressera plus d'un lecteur du tome III est l'attitude de Klein vis-à-vis de Riemann. Quoique Klein n'ait jamais vu Riemann, nous la comparons volontiers à celle de Platon vis-à-vis de Socrate. Maint philologue prétend que le Socrate de Platon n'est pas historique, et le même philologue pourrait croire que le Riemann de Klein n'est pas non plus historique. Pour ma part, je m'exprimerais autrement. Ce que Platon nous raconte de Socrate, c'est ce qu'il a cru voir dans son maître, et, pour le voir, il a fallu le « grand front » de Platon. Ce que Klein nous raconte de Riemann, c'est ce qu'il a cru voir du maître dans ces écrits, et, j'oserais dire, que c'est l'intuition qui a fait voir à Klein des points de vue de Riemann que nul des disciples de ce dernier n'avait soupçonnés. On n'a qu'à regarder le portrait de Riemann pour voir combien il était modeste. Je crois volontiers qu'il avait beaucoup d'idées latentes dont il n'avait lui-même pas conscience.

Il faut lire ce que Klein nous raconte à la page 479 au sujet de sa brochure « Algebraische Funktionen und ihre Integrale » (1882), où il prétendait révéler la vraie pensée de Riemann qui serait à la base de sa conception de la théorie des fonctions, une base essentiellement concrète et physique de ces notions abstraites et métaphysiques. Comme les valeurs réelles d'une fonction algébrique se représentaient couramment par les points d'une courbe, Riemann avait introduit ses surfaces planes avec leur pluralité de feuillets superposés qui n'adhèrent qu'en leurs points de ramification, pour faire la répartition des valeurs complexes d'une fonction algébrique $f(x + iy)$. Klein prétendait que c'était en considérant des phénomènes physiques que Riemann est parvenu à cette conception, et que la surface primitive de Riemann n'était pas aussi abstraite et compliquée, mais était tout naturellement une surface courbe appropriée dans l'espace, tel le tore.

Sur une telle surface les phénomènes du mouvement stable d'un fluide, de la chaleur ou de l'électricité, se représente mathématiquement par une fonction, le potentiel, qui satisfait à l'équation différentielle fondamentale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

de la théorie des fonctions complexes $f\ (x + iy)$. D'une manière fort saisissante Klein développe cette idée dans sa brochure, et montre que de ce point de vue la plupart des théorèmes de la théorie des fonctions deviennent intuitifs. D'après Klein, Riemann n'aurait introduit les surfaces qui portent son nom qu'ultérieurement pour élucider son exposition arithmétisée. A ce propos Klein avait cité comme source de sa pensée une phrase de Prym, élève de Riemann, « que les surfaces de Riemann n'étaient pas nécessairement dans leurs origines des surfaces à plusieurs feuillets superposés au plan. On pourrait étudier les fonctions complexes de position sur n'importe quelle surface courbe aussi bien que sur les surfaces planes. »

Mais Klein a reconnu qu'il avait mal traduit la pensée de Prym. Celui-ci niait formellement (8 avril 1882) qu'il aurait pu vouloir dire que Riemann

lui-même eût conçu l'idée de répartir les valeurs d'une fonction complexe sur une surface courbe comme le fait Klein dans sa brochure.

Les remarques qui précèdent immédiatement le passage que nous venons de rappeler me semblent intéresser particulièrement les lecteurs de cette Revue. Elles sont une réponse au reproche qu'on a pu faire à Klein: celui de manquer de rigueur mathématique dans les considérations qui lui servent de base dans sa brochure, comme aussi, du reste, dans d'autres parties de ses écrits. Klein défend ici le principe des méthodes intuitives dont il a fait usage.

« Je cherche, dit-il, « à parvenir par des réflexions de nature physique à une réelle compréhension des idées fondamentales de la théorie riemannienne. Je voudrais que des procédés semblables deviennent fréquents, car le genre usuel des publications mathématiques refoule habituellement au second plan la question importante de la façon dont on est conduit à la construction de certains problèmes ou de certaines déductions. J'estime que c'est à tort que la majorité des mathématiciens passent entièrement sous silence leurs réflexions intuitives pour ne publier que des démonstrations (certes nécessaires) d'une forme rigoureuse et le plus souvent arithmétisée. Ils semblent retenus par une certaine crainte de ne pas paraître assez scientifiques à leurs collègues. Ou bien la cause est-elle, dans d'autres cas, le désir de ne pas révéler à leurs concurrents la source de leurs propres réflexions?» Il dit encore: « C'est en physicien que j'ai rédigé ma note sur Riemann, aussi ai-je rencontré l'approbation de plusieurs physiciens. »

GRACE CHISHOLM YOUNG (Lausanne).

HURWITZ-COURANT. — **Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen** von A. HURWITZ, herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über *Geometrische Funktionentheorie* von R. COURANT (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band III, zweite Auflage). — 1 vol. gr. in-8°, VI et 496 p., avec 128 fig.; broché, M. 23,40; Julius Springer, Berlin, 1925.

Dans cette deuxième édition de l'excellent ouvrage de Hurwitz-Courant les remarquables cours de Hurwitz sur la théorie des fonctions et sur les fonctions elliptiques ont été reproduits sans modification notable. Seuls quelques paragraphes nouveaux ont été introduits sur la fonction gamma et la série de Lagrange. En revanche la troisième section du livre, consacrée à la théorie géométrique des fonctions au point de vue de Riemann et due à la plume de M. Courant, a été entièrement remaniée. L'étude de la plupart des questions traitées a pris dans cette deuxième édition une ampleur beaucoup plus grande, des développements nouveaux ayant trait aux problèmes les plus captivants, — ceux de Dirichlet, de Riemann et de l'uniformisation des fonctions analytiques, ont été ajoutés, — le champ s'est donc considérablement élargi. L'auteur a cherché à donner une idée des recherches les plus récentes, et nous croyons que l'exposé nouveau résume fidèlement les aspects divers des grands problèmes posés par Riemann et Dirichlet dont la pensée a reçu dans ces dernières années des prolongements si inattendus.

Le lecteur fera un rapprochement entre les exposés, de tendances si différentes, de Hurwitz et de M. Courant, c'est-à-dire entre le point de vue arithmétique de Weierstrass et ceux de Cauchy-Riemann.

D. MIRIMANOFF (Genève).