# § 4. La sommation des séries de Fourier par les moyennes de Cesàro.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

intégrable, de carré non intégrable, dont la série de Fourier diverge presque partout. Il a montré que si $f(x)$ est de carré intégrable, les suites partielles $s_{n_p}(x)$ de la série de Fourier convergent presque partout vers $f(x)$ lorsque $p \to \infty$ si

$$\frac{n_{p+1}}{n_p} > k > 1$$

$k$ étant une constante [1].

Après que MM. Fatou [2], Jerosch et Weyl [3], Weyl [4] eurent démontré certains résultats moins généraux, M. W. H. Young [5] établit que si $\Sigma A_n$ est une série de Fourier, $\Sigma \frac{A_n}{n^\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ est une série de Fourier convergeant presque partout. M. Hardy [6] a réussi à faire voir que dans ce résultat $n^\varepsilon$ peut être remplacé par $\log n$. Dans le cas spécial des fonctions de carré intégrable, MM. Kolmogoroff et Seliverstoff [7] ont montré que la convergence de $\Sigma (a_n^2 + b_n^2)(\log n)^{1+\delta}$ $(\delta > 0)$ entraîne la convergence « presque partout » de la série de Fourier $\Sigma A_n$ et M. Menchoff [8] a montré que le même résultat a lieu si $\Sigma(|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon})$, $(\varepsilon > 0)$, converge.

10. On ne sait pas grand chose sur les propriétés que doit avoir $f(x)$ pour que sa série de Fourier soit absolument convergente. M. S. Bernstein [9] a cependant démontré que si $f(x)$ est à variation bornée et satisfait uniformément dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha < \frac{1}{2}$, sa série de Fourier est absolument convergente; si $\alpha > \frac{1}{2}$, il y a des fonctions dont la série de Fourier n'est pas absolument convergente.

## § 4. La sommation des séries de Fourier par les moyennes de Cesàro.

1. On peut toujours remonter d'une série de Fourier — c'est-à-dire de la suite des constantes de Fourier — à la génératrice

---

[1] Kolmogoroff 2. — [2] Fatou 1. — [3] Jerosch et Weyl. — [4] Weyl. — [5] W. H. Young 11. — [6] Hardy 1. — [7] A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff. — [8] Menchoff 3. — [9] S. Bernstein.

en intégrant terme à terme la série et prenant ensuite la dérivée de la fonction somme. Mais ces opérations constituent un double passage à la limite. FEJÉR[1] a montré que l'on peut remonter plus simplement de la suite des constantes de Fourier à la génératrice à l'aide des moyennes arithmétiques $s_n^{(1)}(x)$ des sommes partielles $s_n(x)$

$$s_n(x) = \sum_0^n A_\nu \tag{15}$$

$$s_n^{(1)}(x) = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} = A_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) A_\nu \,. \tag{16}$$

Il a fait voir que $s_n^{(1)}(x)$ converge vers $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ en tout point où cette expression existe, en particulier donc en tout point de continuité de $f(x)$ et que la convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de $f(x)$. Plus généralement, $s_n^{(1)}(x)$ converge encore vers $f(x)$ si [2]

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)|\, du = 0 \,.$$

Or, cette limite est nulle presque partout. Les moyennes arithmétiques $s_n^{(1)}(x)$ convergent donc presque partout vers $f(x)$.

L'important résultat de FEJÉR a été le point de départ de toute une série de recherches dont le caractère général est l'introduction de la théorie de la sommabilité des séries divergentes dans l'étude des séries de Fourier. Série trigonométrique et série de puissances étant en étroite relation, puisque la première est la partie réelle ou imaginaire d'une série de puissances sur un cercle, il est naturel d'appliquer aux séries trigonométriques les procédés de sommation employés dans l'étude des séries de puissances.

2. La méthode de sommation qui s'est montrée la plus féconde est la *méthode des moyennes arithmétiques de Cesàro* [3]. Soit

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

---

[1] Fejér 1. — [2] Lebesgue 2, 6. — [3] Cesàro 1.

une série quelconque, convergente ou non. Formons la série de puissances

$$f(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_n t^n + \dots$$

et supposons son rayon de convergence égal à 1. On sait, depuis Abel, que si $\Sigma u_n$ converge et a pour somme $s$, $\lim\limits_{t \to 1-0} f(t) = s$. Mais on connaît de nombreux exemples où la limite considérée de $f(t)$ existe et où $\Sigma u_n$ diverge. Il est alors naturel de convenir de regarder cette limite comme somme de la série divergente: c'est le principe du *procédé de sommation de Poisson* sur lequel nous reviendrons plus loin (§ 6). Notons simplement que la formation de $\lim\limits_{t \to 1-0} f(t)$ exige en réalité un double passage à la limite à partir de la suite $u_n$, car la formation de $f(t)$ en inclut déjà un. Cesàro a montré comment, très souvent, on peut se restreindre à un seul passage à la limite, et celà à l'aide du théorème suivant[1]:

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$; $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ deux suites illimitées. Soit $p_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Supposons que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ converge pour $|t| < 1$ et diverge pour $t = 1$. Si $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{p_n} = s$ existe, alors $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n t^n$ converge pour $|t| < 1$ et

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{\sum\limits_{0}^{\infty} a_n t^n}{\sum\limits_{0}^{\infty} p_n t^n} = s .$$

Nous appliquerons ce théorème au cas où

$$p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n + \dots = (1 - t)^{-(1+\delta)} , \qquad (\delta > -1)$$

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + \dots = (1 - t)^{-(1+\delta)} \sum_{0}^{\infty} u_n t^n .$$

---

[1] Cesàro 2.

Par conséquent,

$$p_n = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta+1)} \equiv C_n^{(\delta)} \tag{17}$$

et

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu}^{(\delta)} u_\nu \equiv S_n^{(\delta)} . \tag{18}$$

Le théorème de Cesàro montre donc: si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(\delta)}}{C_n^{(\delta)}} = s$$

existe, alors

$$\lim_{t\to 1-0} \sum_0^\infty u_n t^n = s .$$

Ce résultat conduit à la *définition suivante de la sommation de Cesàro d'ordre* $\delta$, $(\delta > -1)$.

La série $\sum_0^\infty u_n$ est dite *sommable* (C, $\delta$), et a pour somme $s$ si

$$\begin{aligned} s_n^{(\delta)} &= \frac{S_n^{(\delta)}}{C_n^{(\delta)}} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{C_{n-\nu}^{(\delta)}}{C_n^{(\delta)}} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(n-\nu+\delta+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\nu+1)\Gamma(n+\delta+1)} u_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \left(1-\frac{\delta}{n+\delta}\right)\left(1-\frac{\delta}{n+\delta-1}\right)\cdots\left(1-\frac{\delta}{n+\delta-\nu+1}\right) u_\nu \end{aligned} \tag{19}$$

converge vers $s$ lorsque $n \to \infty$.

La convergence ordinaire est identique à la sommabilité (C, 0). Essentiel est le fait qu'une série sommable (C, $\delta_0$) est sommable (C, $\delta$) vers la même somme lorsque $\delta > \delta_0$. La somme formelle de deux séries sommables (C, $\delta$) est encore sommable (C, $\delta$) vers la somme des sommes (C, $\delta$) des deux séries. Le produit formel, d'après la règle de Cauchy, de deux séries dont l'une est sommable (C, $\delta$) et l'autre (C, $\delta'$) est sommable (C, $\delta + \delta' + 1$) vers le produit des deux sommes [1].

La suite continue des ordres de sommation de Cesàro a l'avantage de constituer une échelle de convergence. Car, pour toute

[1] Cesàro 1, 2; Chapman 1, 2.

série, il existe un ordre $\delta_0$ (éventuellement $\delta_0 = -1$ ou $\delta_0 = \infty$) tel que (si $\delta_0 \neq \infty$) la série soit sommable (C, $\delta$) pour $\delta > \delta_0$ et (si $\delta_0 \neq -1$) ne soit pas sommable (C, $\delta$) pour $\delta < \delta_0$.

3. L'étude systématique de la sommation (C, $\delta$) des séries de Fourier a conduit aux résultats suivants [1].

La série de Fourier d'une fonction intégrable converge (C, $\delta$) ($\delta > 0$) vers $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ en tout point où cette expression existe [2]. Si $f(x)$ est continue en chaque point $x$ d'un intervalle $a \leqq x \leqq b$, la convergence est uniforme dans cet intervalle. Ceci n'a plus lieu, en général, si $\delta \leqq 0$. Le résultat primitif de Fejér est contenu dans le précédent ($\delta = 1$).

Si

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+2u) + f(x-2u) - 2f(x)|\, du = 0$$

la série converge (C, $\delta$), ($\delta > 0$) [3]. C'est pour $\delta = 1$ le résultat de Lebesgue énoncé plus haut. M. Hahn [4] a fait voir que ce résultat ne subsiste plus, en général, si l'on remplace la condition précédente par la même débarrassée du signe de valeur absolue sous l'intégrale; il subsiste, par contre, si l'on remplace la sommation (C, $\delta$) par la sommation (C, $1 + \delta$) [5].

Si $q$ est un entier positif et si $\delta > q$, la série de Fourier converge (C, $\delta$) vers la $q$-ième dérivée généralisée de la $q$-ième intégrale $\int^x \ldots \int^x f\, dx \ldots dx$ [6].

La lumière que ces théorèmes jettent sur la nature de la convergence des séries de Fourier est encore plus grande lorsqu'on introduit pour les sommes $s_n^{(\delta)}$ des constantes $\rho_n^{(\delta)}$ analogues aux constantes de Lebesgue $\rho_n = \rho_n^{(0)}$, définies comme borne supérieure de $|s_n^{(\delta)}(x)|$ dans le champ des fonctions $f$ telles que $|f(x)| \leqq 1$. $\rho_n^{(\delta)}$ est une fonction bornée de $n$ pour $\delta > 0$ et pour $\delta \geqq 1$ on a $\rho_n^{(\delta)} = 1$. Les sommes partielles $s_n^{(\delta)}$ de la série de Fourier d'une fonction bornée $f(x)$ sont donc bornées pour $\delta > 0$ et lorsque $\delta \geqq 1$ elles sont toujours comprises entre la borne inférieure et la borne supérieure de $f(x)$. On peut se demander

---

[1] Chapman 1, 2; Gronwall 4; Hardy 1; M. Riesz 1, 7; W. H. Young 3; Kogbetliantz 2. — [2] M. Riesz 1, 7; Chapman 2; Gronwall 4; W. H. Young 3. — [3] Hardy 1. — [4] Hahn 2. — [5] W. H. Young 2. — [6] W. H. Young 3.

ce qu'il advient du phénomène de Gibbs pour une sommation d'ordre $\delta < 1$; la question a été traitée par H. CRAMÉR [1] qui établit l'existence d'une valeur positive $k$ inférieure à 1, telle que lorsque $\delta < k$ le phénomène de Gibbs a lieu et que lorsque $\delta > k$ il n'a pas lieu.

4. La convergence ordinaire et *a fortiori* la convergence (C, $\delta$) ($\delta > 0$) d'une série de Fourier est une propriété locale. Ce n'est plus le cas, en général, lorsque $\delta < 0$. La convergence en un point dépend alors non seulement du comportement de la fonction dans le voisinage de ce point, mais de son comportement dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$. C'est une propriété non plus locale, mais globale.

L'influence des points singuliers de la fonction sur les propriétés de convergence de sa série de Fourier est mise en évidence dans le résultat de Kogbetliantz[2]: Si $f(x)$ est à variation bornée dans les intervalles $(0, \xi - \varepsilon)$ et $(\xi + \varepsilon, 2\pi)$ et si dans l'intervalle $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ elle peut se mettre sous la forme

$$c_0 \mid x - \xi \mid^{-\alpha} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant à variation bornée dans $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, $c_0$ une constante et $0 < \alpha < 1$, la série de Fourier est sommable (C, $\delta$), $\delta > \alpha - 1$ en tout point $x \neq \xi$ vers $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$. Par contre, elle n'est plus sommable (C, $\delta$) en ce point si $\delta \leqq \alpha - 1$. Les moyennes $s_n^{(\delta)}$ d'ordre $\delta < \alpha - 1$ ne sont pas bornées en $n$; par contre, celles d'ordre $\delta = \alpha - 1$ sont bornées en $n$, mais ne convergent pas pour $n \to \infty$. Il est d'autant plus remarquable que si la fonction est à variation bornée dans tout l'intervalle $(0, 2\pi)$ la série converge (C, $\delta$) partout vers $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ lorsque $\delta > -1$ [3].

5. HARDY et LITTLEWOOD [4] se sont posé la question de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une série de Fourier soit sommable au point $x$ par une sommation de Cesàro d'ordre suffisamment élevé. Ils sont arrivés au résultat suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction intégrable $f(x)$ soit sommable par une moyenne

---

[1] Cramer. — [2] Kogbetliantz. — [3] W. H. Young 15. — [4] Hardy and Littlewood 3.

de Cesàro en un point $x$ est qu'il existe un entier $k$ tel que si l'on pose

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_1(t)\,dt\,, \ldots$$

on ait

$$\lim_{t\to 0} \varphi_k(t) = 0\,.$$

Ils ont montré en particulier que si $f$ est bornée dans un intervalle contenant le point $x$, la série de Fourier est ou bien sommable au point $x$ pour toute moyenne de Cesàro d'ordre $\delta > 0$ ou bien n'est sommable par aucune. La condition nécessaire et suffisante de sommabilité est dans ce cas : $\lim_{t\to 0} \varphi_1(t) = 0$ [1].

## § 5. Les séries de Fourier restreintes.

1. En général la série obtenue par dérivation terme à terme d'une série de Fourier diverge partout. Mais M. Fejér [2] a déjà établi que l'on peut encore, à l'aide des moyennes arithmétiques, remonter de la série dérivée à la dérivée de la génératrice. M. W. H. Young [3] a montré que la série dérivée terme à terme de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée converge presque partout (C, $\delta$), $\delta > 0$, vers la dérivée de la fonction. Plus généralement, il a établi que [4] :

*a*) la convergence (C, 1) de la première dérivée (formelle) d'une série de Fourier (c'est-à-dire la série obtenue par dérivation terme à terme) en un point est une propriété locale ;

*b*) qu'il en est de même de la convergence (C, $p$) de la $p$-ième dérivée.

Il résulte de ces propositions que si, par exemple, $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ est continue et à variation bornée dans le voisinage d'un point, la $p$-ième dérivée de la série de Fourier de $f$ converge (C, $p$) vers $\frac{d^p f}{dx^p}$ au point considéré.

---

[1] Hardy and Littlewood 3; M. Riesz 7. — [2] Fejér 1. — [3] W. H. Young 20. — [4] W. H. Young 31.