Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE DÉVELOPPEMENT DE LA THÉORIE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DANS LE DERNIER QUART DE SIÈCLE

Autor: Plancherel, Michel

Kapitel: § 5. Les séries de Fourier restreintes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515749

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de Cesàro en un point x est qu'il existe un entier k tel que si l'on pose

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_1(t)\,dt\,, \ldots$$

on ait

$$\lim_{t\to 0} \varphi_k(t) = 0\,.$$

Ils ont montré en particulier que si f est bornée dans un intervalle contenant le point x, la série de Fourier est ou bien sommable au point x pour toute moyenne de Cesàro d'ordre $\delta > 0$ ou bien n'est sommable par aucune. La condition nécessaire et suffisante de sommabilité est dans ce cas : $\lim_{t\to 0} \varphi_1(t) = 0$ [1].

§ 5. Les séries de Fourier restreintes.

1. En général la série obtenue par dérivation terme à terme d'une série de Fourier diverge partout. Mais M. Fejér [2] a déjà établi que l'on peut encore, à l'aide des moyennes arithmétiques, remonter de la série dérivée à la dérivée de la génératrice. M. W. H. Young [3] a montré que la série dérivée terme à terme de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée converge presque partout (C, δ), $\delta > 0$, vers la dérivée de la fonction. Plus généralement, il a établi que [4] :

a) la convergence (C, 1) de la première dérivée (formelle) d'une série de Fourier (c'est-à-dire la série obtenue par dérivation terme à terme) en un point est une propriété locale ;

b) qu'il en est de même de la convergence (C, p) de la p-ième dérivée.

Il résulte de ces propositions que si, par exemple, $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ est continue et à variation bornée dans le voisinage d'un point, la p-ième dérivée de la série de Fourier de f converge (C, p) vers $\frac{d^p f}{dx^p}$ au point considéré.

---

[1] Hardy and Littlewood 3; M. Riesz 7. — [2] Fejér 1. — [3] W. H. Young 20. — [4] W. H. Young 31.

2. Ces résultats ont conduit M. Young à introduire sous le nom de séries de Fourier restreintes de classe p une classe de séries trigonométriques qui sans être nécessairement des séries de Fourier s'en rapprochent beaucoup par leurs propriétés et qu'il caractérise par les deux propriétés suivantes:

I. La série trigonométrique obtenue en intégrant p-fois terme à terme la série donnée (on laisse de côté le terme constant) est une série de Fourier dont nous désignerons par $F(x)$ la génératrice.

II. Dans un intervalle partiel (a, b) d'un intervalle de périodicité, $F(x)$ est l'intégrale p-uple d'une fonction $f(x)$ intégrable dans (a, b). On suppose donc que dans (a, b)

$$F(x) = \int_{(p)}^{x} \dots \int^{x} f\,dx \dots dx\,, \qquad f(x) = \frac{d^p F}{dx^p}\,.$$

La série trigonométrique donnée est alors appelée par M. Young une *série de Fourier de classe* p *restreinte à l'intervalle* (a, b) et $f(x)$ la fonction *associée* à cette série dans l'intervalle (a, b). La raison de cette dénomination est que dans (a, b) et relativement à la sommation de Cesàro d'ordre p une telle série a exactement les mêmes propriétés de convergence que la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0,2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) [1].

3. Pour pouvoir donner pour une série de Fourier restreinte de classe p des critères de convergence relatifs à une sommation d'ordre $q<p$, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse supplémentaire relative non plus seulement à l'intervalle (a, b) mais à tout l'intervalle $(0,2\pi)$. Comme hypothèse supplémentaire, M. W. H. Young ajoute la condition

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^{p-1}} = 0\,.$$

Les conditions de convergence $(C, p-1)$ dans (a, b) d'une telle série sont alors les mêmes que celles de la convergence $(C, p-1)$ de la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0,2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) [2].

[1] W. H. Young 31. — [2] W. H. Young 23, 33.

En particulier donc, si $p = 1$, nous voyons qu'une série de Fourier restreinte de classe 1, telle que $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ jouit dans l'intervalle de restriction et relativement à la convergence ordinaire de toutes les propriétés d'une série de Fourier.

M. Young a fait de ces séries une application importante à l'étude de la convergence des séries de polynomes de Legendre [1], des séries de fonctions de Bessel [2] et de certaines séries trigonométriques non harmoniques [3]. Une autre application intéressante [4] généralise un théorème de Fatou [5] affirmant qu'une série de puissances $\Sigma a_n z^n$, telle que $a_n \to 0$, de rayon de convergence 1, converge sur le cercle de convergence en tout point de régularité de la fonction analytique engendrée par la série. Ce théorème de Fatou a été dans sa démonstration notablement simplifié par M. M. Riesz [6] qui a montré de plus que la convergence est uniforme sur un arc de régularité et qui a, en remplaçant la condition $a_n \to 0$ par la condition $\frac{a_n}{n^\delta} \to 0$ ($\delta \geqq 0$), montré que le théorème subsiste, à condition de remplacer la convergence ordinaire par la convergence (C, δ). Si $\left|\frac{a_n}{n^\delta}\right| < M$, les sommes partielles de la série restent bornées (C, δ) aux points de régularité.

§ 6. Autres procédés de sommation.

1. Il est quelquefois utile d'introduire d'autres procédés de sommation équivalents au procédé de Cesàro. C'est ainsi qu'on peut, pour les indices δ positifs entiers, définir avec Hölder [7] un procédé de sommation que MM. Knopp [8] et Schnee [9] ont montré équivalent au procédé de sommation (C, δ). Chapman [10], M. Riesz [11] et W. H. Young [12] ont étudié de tels procédés.

2. M. de la Vallée-Poussin [13] a donné un procédé nouveau pour sommer une série $\sum_0^\infty u_n$; il consiste à donner comme

[1] W. H. Young 29, 30. — [2] W. H. Young 35. — [3] W. H. Young 34. — [4] W. H. Young 32. — [5] Fatou 1. — [6] M. Riesz 3, 5, 6. — [7] Hölder. — [8] Knopp 1, 2, 3. — [9] Schnee; voir aussi Landau 1, 2. — [10] Chapman 1. — [11] M. Riesz 1, 2; voir aussi Hardy and Riesz 1. — [12] W. H. Young 3. — [13] Vallée-Poussin 2.