SOMMABILITÉ ET FONCTION $E_\alpha(x)$

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515751

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tique. Le sujet est si vaste que même ces développements supplémentaires ne complètent que d'une manière imparfaite l'examen des concepts en question. Nous espérons cependant que les idées exposées ici pourront être d'un intérêt général pour certains maîtres de mathématiques et les aider à comprendre plus complètement une phase importante du développement des mathématiques.

Université d'Illinois, août 1924.

(Traduit de l'anglais par Mlle S. GODARD, Genève.)

SOMMABILITÉ ET FONCTION $E_\alpha(x)$

PAR

A. BUHL (Toulouse).

L'*Enseignement mathématique* a publié, en 1908, un article de M. A. COSTABEL, *Sur le prolongement analytique d'une fonction méromorphe*, sujet sur lequel je suis revenu grâce à des circonstances récentes.

M. Costabel résumait un travail présenté à la Faculté des Sciences de Montpellier pour l'obtention d'un diplôme d'Etudes supérieures. On pourrait revenir aussi sur le sujet pédagogique, le diplôme en question existant toujours, comme sur le sujet scientifique qui n'a cessé de progresser depuis dix-sept ans.

Je n'ose prétendre que le diplôme ait fait rédiger des choses de grand intérêt, ne serait-ce que parce qu'aucune publication imprimée n'est obligatoire, mais enfin bien des élèves y ont honorablement travaillé et se sont notablement élevés ainsi au-dessus de la licence, tant d'ailleurs en physique qu'en mathématiques. Et, à l'heure actuelle, le mouvement continue de manière sensiblement uniforme.

Quant à la sommabilité et au prolongement analytique, il y a

dans le mémoire de M. Costabel des choses insuffisamment développées susceptibles cependant de faire naître encore beaucoup d'intérêt. J'indique ici, très succinctement, un lien entre l'emploi, comme fonction sommatrice, de la fonction exponentielle itérée et la construction, également à des fins de prolongement analytique, de la fonction $E_\alpha(x)$ de M. G. Mittag-Leffler. Dans le premier cas, on a un domaine de sommabilité dont la frontière constitue justement le contour d'intégration sur lequel naît $E_\alpha(x)$.

* * *

1. Soit $F(x)$ une fonction analytique sans singularité à l'origine 0 et pour laquelle, par suite, nous pouvons écrire, dans un certain cercle C_0 de centre 0,

$$F(x) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots$$

Soit $f(\xi)$ une fonction *entière*. Nous poserons

$$\varphi_1(\xi) = f(\xi) - \gamma_0 = \begin{cases} \gamma_1\xi + \gamma_2\xi^2 + \dots \\ c_1 + c_2 + \dots \end{cases}.$$

Posons aussi

$$s_n = a_{00} + a_{01}x + \dots + a_{0n}x^n .$$

En effectuant le produit $F(x)\varphi_1(\xi)$ on obtient sans peine

$$F(x) = \sum_0^\infty \frac{c_{n+1}s_n}{\varphi_1(\xi)} + \sum_1^\infty a_{0n}x^n \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{\varphi_1(\xi)} . \qquad (1)$$

Supposons maintenant que ξ aille à l'infini suivant un chemin tel que $\varphi_1(\xi)$, ou $f(\xi)$, croisse en module incomparablement plus vite que n'importe quel polynome; un tel chemin existe toujours (théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass). Dans ces conditions le second sigma de la formule précédente disparaît et il reste

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_0^\infty \frac{c_{n+1}s_n}{\varphi_1(\xi)} , \qquad (2)$$

formule que jusqu'ici nous ne pouvons considérer comme valable que dans C_0.

2. Prenons maintenant $F(x)$ méromorphe avec les pôles simples $a_1, a_2, \ldots$ rangés par ordre de modules croissants. Soit C_k un cercle de centre 0 dont la circonférence passe entre a_k et a_{k+1}. Pour x dans ce cercle, on a

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i}{x - a_i} + a_{k0} + a_{k1} x + \ldots \tag{3}$$

ce qui donne, dans C_0,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{i=k} A_i \left(-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots \right) + a_{k0} + a_{k1} x + \ldots$$

Or, (3) peut s'écrire

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} A_i \left[-\frac{1}{a_i} - \frac{x}{a_i^2} - \ldots - \frac{x^n}{a_i^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x - a_i)} \right] \\ + (a_{k0} + a_{k1} x + \ldots + a_{kn} x^n) + a_{k,n+1} x^{n+1} + \ldots \end{array} \right.$$

ou bien

$$F(x) = s_n + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i x^{n+1}}{a_i^{n+1}(x - a_i)} + a_{k,n+1} x^{n+1} + \ldots$$

Si maintenant on multiplie tous les termes de cette formule par c_{n+1} et que l'on somme de $n = 0$ à $n = \infty$, on peut écrire

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_0^\infty \frac{c_{n+1} s_n}{\varphi_1(\xi)} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\varphi_1\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_1(\xi)} \frac{A_i}{x - a_i} \\ \displaystyle + \sum_{n=0}^\infty a_{k,n+1} x^{n+1} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_{n+1}}{\varphi_1(\xi)} . \end{array} \right. \tag{4}$$

Cette formule est valable dans C_k ; elle revient à (1) dans C_0. En faisant croître ξ comme il a été expliqué au paragraphe précédent, elle se réduit à

$$F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_0^\infty \frac{c_{n+1} s_n}{\varphi_1(\xi)} + \lim_{\xi=\infty} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\varphi_1\left(\frac{\xi x}{a_i}\right)}{\varphi_1(\xi)} \frac{A_i}{x - a_i} . \tag{5}$$

Elle est toujours valable, par le premier sigma, dans C_0, le second n'ayant alors aucune raison d'être. Se débarrasser du second sigma *en dehors de* C_0, c'est reprendre les problèmes de sommabilité traités originairement par M. Emile Borel pour $f(\xi)$ égal à e^{ξ} ou à e^{η} avec $\eta = \xi^m$; nous n'y reviendrons pas.

3. Reprenons le cas, de M. A. Costabel, $f(\xi) = e^{\eta}$ avec $\eta = e^{\xi}$. Il nous faut étudier la limite du rapport

$$\varphi_1\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) : \varphi_1(\xi) \qquad \text{ou bien} \qquad f\left(\frac{\xi x}{a_i}\right) : f(\xi)$$

ce qui, pour f ayant la forme indiquée, se réduit à une exponentielle dont l'exposant est

$$e^{\frac{\xi x}{a_i}} - e^{\xi} .$$

Cela nous conduit à écrire que la partie réelle de cette quantité croît indéfiniment par valeurs négatives. Or, en posant

$$\xi = \rho e^{i\omega} , \qquad x = re^{i\theta} , \qquad a_i = \alpha_i e^{i\tau_i}$$

on trouve que cette partie réelle est

$$e^{\frac{\rho r}{\alpha_i}\cos(\theta+\omega-\tau_i)} \cos\left[\frac{\rho r}{\alpha_i}\sin(\theta+\omega-\tau_i)\right] - e^{\rho\cos\omega}\cos(\rho\sin\omega) . \qquad (6)$$

Envoyons ξ vers l'infini positif sur la droite D

$$\rho \sin\omega = a < \frac{\pi}{2} .$$

Dans ces conditions $f(\xi)$ croît incomparablement plus vite que n'importe quel polynome en ξ et ω tend vers zéro. Le second terme de la différence (6), devenant

$$- e^{\rho}\cos a ,$$

croît indéfiniment par valeurs négatives.

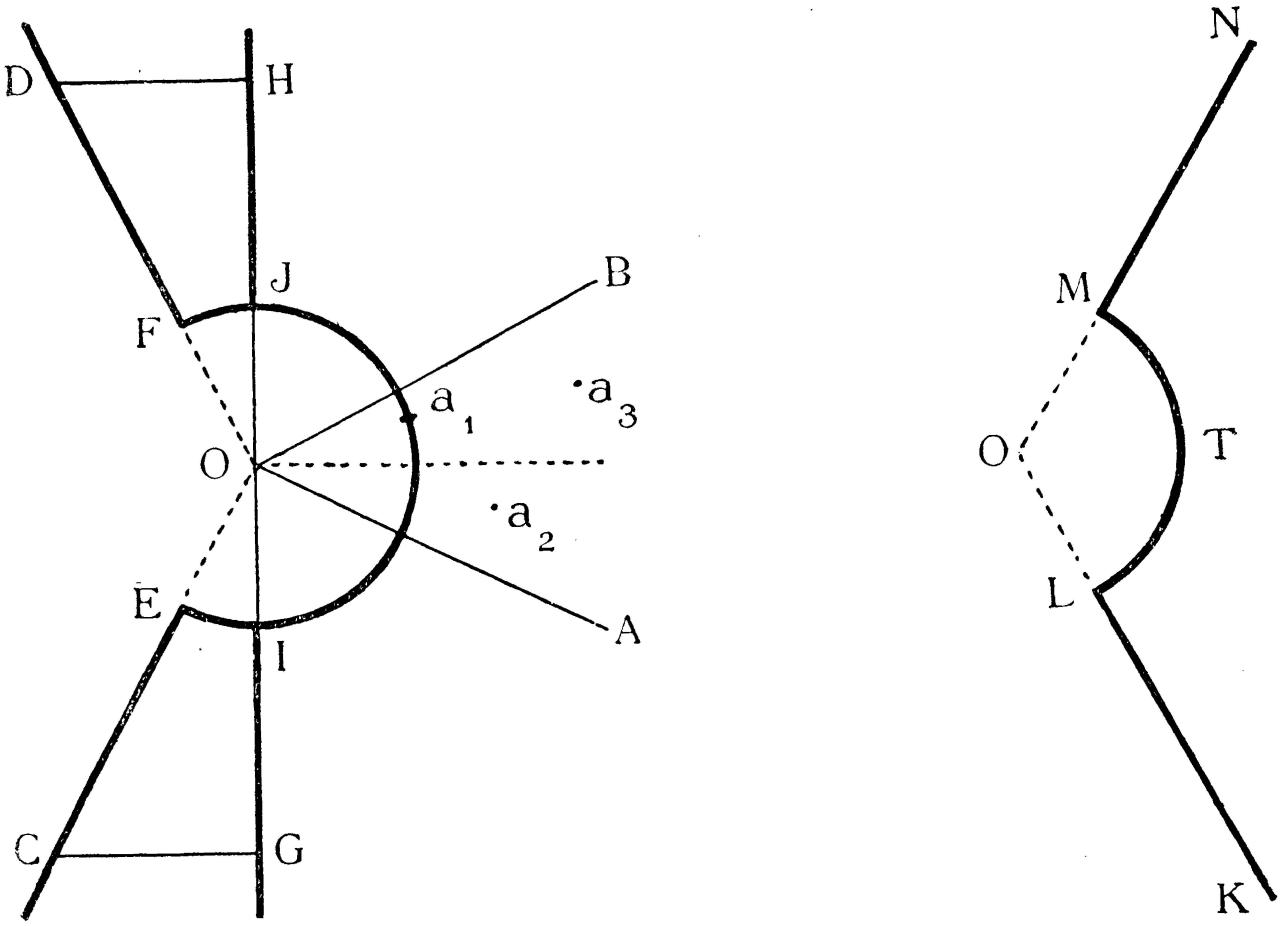
Soit, de plus, $\cos(\theta + \omega - \tau_i) < 0$. Comme $\omega = 0$, ceci donne

$$\frac{3\pi}{2} > \theta - \tau_i > \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi}{2} + \tau_i > \theta > \frac{\pi}{2} + \tau_i \qquad (7)$$

et le pôle a_i rejette x dans une région de sommabilité limitée par une droite passant par 0 et perpendiculaire à Oa_i, la dite région étant celle qui ne contient pas a_i.

Avec $\cos(\theta + \omega - \tau_i) > 0$, l'expression (6) peut probablement encore tendre vers l'infini négatif; pour un x déterminé, le cosinus qui affecte le crochet passera une infinité de fois par des ensembles continus de valeurs négatives quand ρ croîtra indéfiniment d'où la possibilité de construire pour $F(x)$ des formules de sommabilité qui exigeraient que ξ, en allant à l'infini sur D, soit, sur cette droite, dans des intervalles à déterminer d'après les valeurs de x pour lesquelles on voudrait représenter $F(x)$.

On pourrait imaginer des choses plus compliquées et plus intéressantes encore. La différence (6) pourrait être négative sans



que le premier terme soit nul ou négatif mais il y a là de nouveaux aspects des problèmes de sommabilité que nous nous bornons à indiquer pour le moment. Ces indications pourraient conduire à de nouvelles recherches.

Revenons au cas des formules (7), cas dans lequel ξ va à l'infini sur D sans être inféodé en rien à x. La région de somma-

bilité déjà indiquée n'existe évidemment que si tous les pôles de $F(x)$ sont condensés dans un angle AOB d'ouverture $\lambda < \pi$. Pour plus de symétrie admettons que AOB ait pour bissectrice la partie positive Ox de l'axe réel. La région de sommabilité sera l'intérieur de COD (les angles DOB et COA étant droits), et aussi tout le cercle taylorien de rayon Oa_1; ce sera donc la région du plan située à gauche du contour CEa_1FD. En effet, la formule de sommabilité est (5) débarrassée du second sigma; or si nous nous sommes arrangés de manière à détruire ce sigma dans l'angle COD il n'a jamais eu, par ailleurs, aucune raison d'être dans le cercle taylorien.

4. Arrivons maintenant au point particulièrement intéressant, point qui a surtout décidé l'auteur à rédiger ces lignes. Le contour CEa_1FD — ou plus brièvement le contour S — que nous venons de construire comme contour limite d'une région de sommabilité correspondant à l'emploi de la fonction exponentielle *itérée* comme fonction sommatrice, ce contour, disons-nous, n'est pas une nouveauté. Hermann Hankel s'en est déjà servi pour définir la fonction Γ et ce par la formule

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2i\pi}\int_S e^t\, t^{-x}\, dt\ . \tag{8}$$

Si les pôles a_i se rangent tous sur Ox, comme ce serait le cas pour la fonction

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)}\ ,$$

l'angle COD devient égal à π et ses côtés viennent se confondre avec GOH. Dans un tel cas la formule (8) subsiste aussi comme on le voit par adjonction au contour S des contours CGIEC et DFJHD et en observant que l'intégration en t donne des résultats nuls le long de CG et de DH (au moins pour x positif).

Soit alors S remplacé par $S' \equiv GIa_1JH$ et $x = 1$; on a

$$1 = \frac{1}{2i\pi}\int_{S'} e^t \frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\pi}\int_T \beta\, e^{\omega^\beta} \frac{d\omega}{\omega}\ . \tag{9}$$

On est passé de la première à la seconde intégrale en posant

$$t^\alpha = \omega\ , \qquad \alpha\beta = 1$$

avec α constante positive aussi petite que l'on veut. Alors le contour S′ est changé en un contour T ≡ KLTMN en lequel l'angle KON a pour ouverture $\alpha\pi$. On déduit de (9) la fonction

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_T \beta\, e^{\omega^\beta} \frac{d\omega}{\omega - x}, \qquad \beta = \frac{1}{\alpha}$$

de M. G. Mittag-Leffler, fonction *entière* qui tend vers zéro, quand x va à l'infini le long d'un rayon vecteur O∞ situé à gauche de T, et qui croît indéfiniment en module quand le rayon vecteur traverse l'arc LTM.

5. Nous ne pousserons pas plus avant ces comparaisons mais ferons remarquer le rôle extrêmement important que les considérations précédentes ont joué dans la Science et particulièrement dans l'étude, assez lente à débrouiller, des fonctions entières. En avril 1899 un spécialiste de tout premier rang, M. Emile Borel, en était réduit à demander, par la question 1477 de *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, si une fonction entière pouvait, dans un certain angle, rester finie à l'infini. La réponse vint précisément de la fonction $E_\alpha(x)$ de M. G. Mittag-Leffler que le grand géomètre suédois donna en ses célèbres Notes *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme de fonction monogène* (Acta Mathematica, 1899-1919; voir particulièrement la cinquième note, 1904). Tout le problème du prolongement analytique était en cause et ses nécessités prolongèrent aussi la question précédente.

L'angle se ferma et ne donna plus qu'une demi-droite le long de laquelle la fonction devenait encore infinie cependant qu'elle devenait nulle à l'infini le long de tout autre rayon vecteur (Lindelöf, Malmquist). Puis la demi-droite disparut à son tour et l'on eut la fonction entière qui devenait nulle à l'infini dans *toutes* les directions. N'était-ce pas paradoxal ? N'y avait-il pas là une contradiction extraordinaire avec le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass qui veut précisément qu'une fonction entière devienne toujours infinie à l'infini de quelque manière. Nullement, car la valeur infinie qu'on ne trouve jamais *sur un rayon vecteur* se trouve à l'infini quand on y va par d'autres chemins, par exemple sur de certaines droites

parallèles à l'axe réel. C'est ce que montra M. G. Mittag-Leffler dans sa Sixième Note.

En la matière, le dernier mot du fantastique appartient à M. Karl Grandjot, de Göttingen, qui dans un écrit de cinq pages *Ueber Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen* (Mathematische Annalen, Band 91, Heft 3, 4; 1924) vient de construire une fonction entière qui tend vers zéro quand la variable va à l'infini le long d'une branche de courbe *algébrique* quelconque, ce qui n'empêche pas que le long de certains chemins transcendants la fonction peut devenir infinie, sauvant encore le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass qui, à vrai dire, n'a jamais été menacé.

Nous voici assez loin des remarques élémentaires arrêtées au paragraphe précédent. Mais ceci montre combien le sujet est vivant et pourrait inspirer de Diplômes d'Etudes sans parler de Mémoires beaucoup plus élevés.

SUR L'EXISTENCE D'UNE LIMITE CONSIDÉRÉE PAR M. HADAMARD

PAR

G. PÓLYA (Zurich).

La remarque très élémentaire qui suit se rattache à un passage du Mémoire fondamental de M. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* [1]. Il s'agit de la recherche des singularités polaires. Il faut démontrer — c'est le point délicat du raisonnement [2] — que l'existence de la *limite supérieure* d'une certaine quantité entraîne, dans les conditions particulières données, l'existence de la *limite* de la même

[1] *Journal de Mathématiques*, 4me série, t. 8, 1892. Voir en particulier p. 120-122.

[2] J. HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Collection Scientia, 1901, p. 40).