Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXISTENCE D'UNE LIMITE CONSIDÉRÉE PAR M. HADAMARD

Autor: Pólya, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515752

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

parallèles à l'axe réel. C'est ce que montra M. G. Mittag-Leffler dans sa Sixième Note.

En la matière, le dernier mot du fantastique appartient à M. Karl Grandjot, de Göttingen, qui dans un écrit de cinq pages *Ueber Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen* (Mathematische Annalen, Band 91, Heft 3, 4; 1924) vient de construire une fonction entière qui tend vers zéro quand la variable va à l'infini le long d'une branche de courbe *algébrique* quelconque, ce qui n'empêche pas que le long de certains chemins transcendants la fonction peut devenir infinie, sauvant encore le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass qui, à vrai dire, n'a jamais été menacé.

Nous voici assez loin des remarques élémentaires arrêtées au paragraphe précédent. Mais ceci montre combien le sujet est vivant et pourrait inspirer de Diplômes d'Etudes sans parler de Mémoires beaucoup plus élevés.

SUR L'EXISTENCE D'UNE LIMITE CONSIDÉRÉE PAR M. HADAMARD

PAR

G. PÓLYA (Zurich).

La remarque très élémentaire qui suit se rattache à un passage du Mémoire fondamental de M. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* [1]. Il s'agit de la recherche des singularités polaires. Il faut démontrer — c'est le point délicat du raisonnement [2] — que l'existence de la *limite supérieure* d'une certaine quantité entraîne, dans les conditions particulières données, l'existence de la *limite* de la même

[1] *Journal de Mathématiques*, 4me série, t. 8, 1892. Voir en particulier p. 120-122.

[2] J. HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Collection Scientia, 1901, p. 40).

quantité. La difficulté, mise à nu, se réduit à la démonstration de la proposition suivante:

Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *des quantités réelles non-négatives,*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = a \ .$$

Si la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *est assujettie à la condition*

$$p_{n+1}p_{n-1} - p_n^2 > -\alpha^{2n} \tag{1}$$

pour n *suffisamment grand, où* α *est une constante,* $0 < \alpha < a$, *on a nécessairement*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = a \ .$$

Voici une démonstration fondée sur un principe facile à saisir et différant un peu de celle donnée par M. Hadamard.

Comparons la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ à une autre $q_1, q_2, q_3, \ldots$ qui, au lieu de satisfaire à l'inégalité (1), satisfait à l'équation recurrente

$$q_{n+1}q_{n-1} - q_n^2 = -\alpha^{2n} \ . \tag{2}$$

Beaucoup de démonstrations sont fondées sur des « comparaisons » analogues. Guidé par les résultats mêmes de M. Hadamard, à la démonstration desquels le théorème énoncé sert de lemme, on essaie de satisfaire à l'équation (2) en mettant

$$q_n = \beta^n - c\gamma^n \ .$$

On y satisfait effectivement si les constantes β, γ, c sont assujetties aux relations

$$\beta\gamma = \alpha^2 \ , \qquad c(\beta-\gamma)^2 = \beta\gamma \ .$$

On choisit β arbitrairement mais tel que

$$\alpha < \beta < a \ .$$

En déterminant d'abord γ puis c on trouve

$$q_n = \beta^n \left[1 - \left(\frac{\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2n} \right] .$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} = \beta < a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} \,. \tag{3}$$

Si n est suffisamment grand, $n > \mathrm{N}$, on a

$$q_n > \alpha^n \tag{4}$$

et l'inégalité (1) est aussi valable. En vertu de (3) il existe certainement une infinité d'indices n tels que

$$p_n > q_n \,.$$

Si cette dernière inégalité *n'est pas* constamment satisfaite pour $n > \mathrm{N}$ on trouvera deux indices *consécutifs* $m-1$ et m tels que

$$p_{m-1} \leqq q_{m-1} \,, \qquad p_m > q_m \,, \qquad m > \mathrm{N} \,.$$

Des inégalités

$$\frac{p_m}{p_{m-1}} > \frac{q_m}{q_{m-1}} \,, \qquad p_m > q_m > \alpha^m \tag{5}$$

combinées avec (1), (2), (4), il résulte

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} > \frac{p_m}{p_{m-1}}\left(1 - \frac{\alpha^{2m}}{p_m^2}\right) > \frac{q_m}{q_{m-1}}\left(1 - \frac{\alpha^{2m}}{q_m^2}\right) = \frac{q_{m+1}}{q_m}$$

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} > \frac{q_{m+1}}{q_m} \,, \qquad p_{m+1} > q_{m+1} > \alpha^{m+1} \,.$$

C'est-à-dire on peut remplacer m par $m+1$ dans l'inégalité (5). Par les mêmes calculs on a

$$\frac{p_{m+2}}{p_{m+1}} > \frac{q_{m+2}}{q_{m+1}} \,, \qquad p_{m+2} > q_{m+2} > \alpha^{m+2}$$

et ainsi de suite. Donc étant donné β, $a > \beta > \alpha$, nous savons déterminer un entier m tel que l'on ait pour $n = m, m+1, m+2, \ldots$

$$p_n > \beta^n \left[1 - \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n}\right] .$$

C. q. f. d.