# LES FONCTIONS MONOTONES ET L'INTÉGRATION DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS

Autor(en): **Young, R. C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515753

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# LES FONCTIONS MONOTONES ET L'INTÉGRATION DANS L'ESPACE A $n$ DIMENSIONS

PAR

R. C. YOUNG (Lausanne).

1. — Dans un mémoire sur les intégrales multiples [1], M. W. H. Young énonce [2] sans démonstration la propriété suivante des fonctions $g(x, y)$ monotones par rapport à l'ensemble de ses variables $(x, y)$, c'est-à-dire telles que les trois accroissements

$$\left\{\begin{array}{l} g(x+h, y) - g(x, y), \\ g(x, y+k) - g(x, y), \end{array}\right. \tag{1}$$

$$g(x+h, y+k) - g(x, y+k) - g(x+h, y) + g(x, y),$$

aient partout le même signe (que l'on peut supposer positif), quels que soient $x$, $y$ et $h$, $k$ positifs.

*Etant donnée une fonction* g(x, y) *monotone par rapport à l'ensemble de ses variables et un point quelconque* P *de sa région de définition, il existe dans chaque quadrant de sommet P une valeur limite unique de* g (x, y) *au voisinage de P.*

(Nous appelons quadrant de sommet P tout angle droit de sommet P limité par deux demi-droites parallèles aux axes.)

2. — Ce fait admet une très simple démonstration qui s'adapte sans autre au cas d'un nombre quelconque de dimensions.

Je désignerai par le nom d'intervalle (plan) tout rectangle à côtés parallèles à l'axe. Un intervalle (plan) est déterminé lorsqu'on connaît les extrémités d'une de ses diagonales.

---

[1] « *On Multiple Integrals* », Proceedings of the Royal Society, A, vol. 93, p. 31 (1917).

[2] Cet énoncé, parfaitement exact, a été corrigé par erreur dans une note d'un mémoire de W. H. YOUNG et GRACE CHISHOLM YOUNG: « *On the Discontinuities of Monotone functions of several variables* », Proceedings of the London Math. Society, Ser. 2, vol. 22, part 2, p. 126.

La dernière des expressions (1), soit l'accroissement double de $g(x, y)$ dans l'intervalle $(x, y; x+h, y+k)$, étant toujours positive, il s'ensuit qu'à deux intervalles dont l'un est contenu dans l'autre correspondent toujours deux accroissements dont le premier est inférieur au second. Par conséquent:

à une suite d'intervalles dont chacun contient les suivants correspond une suite d'accroissements ayant une limite unique.

Convenons de désigner par (AB) l'intervalle ayant pour diagonale AB.

Nous dirons qu'une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ à limite unique P est monotone lorsque, pour chaque $n$, le point $P_{n+1}$ est contenu dans l'intervalle $(P_nP)$. L'accroissement de $g(x, y)$ dans l'intervalle $(P_nP)$ tend, pour une telle suite, vers une limite unique lorsque $P_n$ s'approche de P.

Or chacun des sommets de l'intervalle $(P_nP)$ non confondus avec P ou $P_n$ s'approche de P le long d'une demi-droite issue de P parallèlement à l'un des axes de coordonnées. Les valeurs correspondantes de $g(x, y)$ ont donc une limite unique, d'après la propriété des fonctions monotones d'une seule variable. En considérant séparément les divers termes de l'accroissement de $g(x, y)$ dans l'intervalle $(P_n P)$, et en exceptant le terme relatif à $P_n$, on constate donc que chacun tend vers une limite unique.

Par conséquent le terme relatif à $P_n$ tend aussi vers une limite unique. Ainsi:

lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ forment une suite monotone, les valeurs correspondantes de $g$ ont une limite unique.

Soient alors données deux suites quelconques

$$P_1, \quad P_2, \ldots$$
$$Q_1, \quad Q_2, \ldots$$

à limite unique P, situées toutes deux dans un même quadrant de sommet P. Nous pouvons en extraire deux suites

$$P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots, P_{n_k}, \ldots \qquad n_i > n_{i-1}$$
$$Q_{m_1}, Q_{m_2}, \ldots, Q_{m_k}, \ldots \qquad m_i > m_{i-1}$$

respectivement, telles que la suite

$$P_{n_1}, Q_{m_1}, P_{n_2}, Q_{m_2}, \ldots, P_{n_k}, Q_{m_k}, \ldots$$

ayant pour limite P, soit monotone. Les valeurs correspondantes de $g$ ont alors une limite unique; ce qui démontre qu'étant donnée dans un même quadrant de sommet P, deux suites quelconques à limite unique P, nous pouvons extraire de chacune d'elles une suite partielle telle que les valeurs correspondantes de $g$ aient une limite unique, la même pour les deux suites partielles.

Par suite, il ne peut exister, dans un même quadrant de sommet P, deux valeurs limites distinctes de $g(x, y)$ au voisinage de P.

3. — Il suffit, pour passer du plan à l'espace de $n$ dimensions, d'interpréter le mot d'*intervalle* (AB) comme désignant l'ensemble de tous les points P dont les $i^{\text{mes}}$ coordonnées sont comprises entre les $i^{\text{mes}}$ coordonnées de A et de B, pour chaque $i$. Lorsqu'il y a égalité entre $k$ des coordonnées de A et les $k$ coordonnées correspondantes de B, l'intervalle (AB) est dit *à* $(n-k)$ *dimensions*.

Un quadrant de sommet A sera l'ensemble des points P tels que la différence des $i^{\text{mes}}$ coordonnées de P et de A ait un signe donné pour chaque $i$.

Les accroissements d'une fonction $g(\text{P})$ seront définis par induction; ainsi les accroissements $k^{\text{tuples}}$ de $g$ seront les accroissements par rapport à l'une des variables de ses accroissements par rapport à $(k-1)$ autres variables. L'accroissement $n^{\text{tuple}}$ d'une fonction de $n$ variables dans un intervalle (AB) est unique, comme on s'en convainc facilement; c'est la somme de $2^n$ termes, soient les valeurs de $g(\text{P})$, avec des signes bien déterminés, aux $2^n$ sommets de l'intervalle (AB).

Une fonction monotone par rapport à l'ensemble de ses variables sera définie comme ayant tous ses accroissements de même signe.

En supposant la proposition vérifiée dans le cas de $(n-1)$ dimensions et en suivant point par point le raisonnement précédent, on l'établit alors pour le cas de $n$ dimensions.

4. — On sait [1] que la propriété établie ci-dessus ne subsiste pas partout dans le cas d'une fonction linéairement monotone, c'est-à-dire monotone par rapport à chacune de ses variables séparément. Ces dernières ne donnent donc pas une généralisation satisfaisante de la notion de fonction monotone d'une

[1] W. H. Young et Grace Chisholm Young, *loc. cit.*, p. 126.

seule variable. Aussi convient-il, comme nous le ferons dans la suite, de réserver le nom de *fonctions monotones* aux fonctions monotones par rapport à l'ensemble de leurs variables [1]. D'autre part, c'est par l'emploi de ces fonctions qu'on parvient à transposer immédiatement à l'espace d'un nombre quelconque de dimensions les méthodes et les résultats de la théorie de l'intégration par rapport à une fonction monotone d'une seule variable — théorie dont on connaît la fertilité croissante d'application depuis que Stieltjes[2], sans encore dépasser la considération d'une fonction intégrande continue, en avait posé les premières bases.

La facilité de ces généralisations est due, comme on le sait, au caractère même de la méthode des suites monotones de fonctions qui réduit la définition d'intégrale à celle de l'intégrale d'une fonction d'un type simple. Cette méthode n'est en effet aucunement liée au nombre de dimensions de l'espace dans lequel on travaille. Quant aux trois points de départ adoptés par M. W. H. Young dans le cas d'une variable unique, et dont chacun a son avantage propre, deux d'entre eux sont d'une adaptation immédiate [3] dès qu'on a choisi l'équivalent convenable des concepts d'intervalle et d'accroissement linéaires: ce sont, respectivement, les formules de l'intégrale, par rapport à $g(x)$ monotone,

1) d'une fonction continue (formule de Stieltjes) [4],

2) d'une fonction constante par intervalles n'ayant aucun point de discontinuité en commun avec $g(x)$ [5].

Le troisième point de départ est la formule de l'intégrale, par rapport à $g(x)$ monotone, d'une fonction quelconque constante par intervalles [6]. Pour qu'on puisse l'utiliser sur un même pied que les deux précédentes, la démonstration de la propriété énoncée d'une fonction monotone d'un nombre quelconque de variables est fondamentale.

---

[1] Pour la même raison, on réservera à la différence de deux telles fonctions le nom de *fonction à variation bornée.*

[2] *Recherches sur les fractions continues.* 1894. Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse Ser. I, vol. 8, pp. 1-122.

[3] W. H. Young, « *On Multiple Integrals* », loc. cit., p. 32.

[4] W. H. Young, « *Integration with respect to a function of bounded variation* ». Proceedings of the London Math. Soc., 2 series, vol. 13, p. 137 (II).

[5] Ibid., p. 139 (III).

[6] Ibid., p. 113 (I).

Dès lors, en effet, puisqu'on peut définir au voisinage d'un point $(u, v)$, (pour me restreindre au cas de deux variables momentanément) huit valeurs limites bien déterminées

$$g(u-0,\ v-0)\ ,\qquad g(u-0,\ v)\ ,\qquad g(u-0,\ v+0)\ ,\qquad \text{etc.}\ ,$$

on peut écrire sans autre la formule donnant l'intégrale par rapport à $g(x,y)$ monotone d'une fonction $f(x,y)$ quelconque constante par intervalles, c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= f(u_i+0,\ v_j+0)\ , && u_i < x < u_{i+1}\ ,\quad v_j < y < v_{j+1}\ ;\\ f(x,\ v_j) &= f(u_i+0,\ v_j)\ , && u_i < x < u_{i+1}\ ;\\ f(u_i,\ y) &= f(u_i,\ v_j+0)\ , && v_j < y < v_{j+1}\ . \end{aligned}$$

En posant d'une façon symbolique

$$\overset{cd}{\underset{ab}{\Delta}}(g) = g(a,\ b) - g(a,\ d) - g(c,\ b) + g(c,\ d)\ ,$$

cette formule sera la suivante

$$\int_{u_1,\ v_1}^{u_m,\ v_n} f(x,\ y)\,dg(x,\ y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{ f(u_i,\ v_j)\overset{u_i+0,\ v_j+0}{\underset{u_i-0,\ v_j-0}{\Delta}}(g) + f(u_i,\ v_j+0)\overset{u_i+0,\ v_{j+1}-0}{\underset{u_i-0,\ v_j+0}{\Delta}}(g) \right.$$
$$\left. + f(u_i+0,\ v_j)\overset{u_{i+1}-0,\ v_j+0}{\underset{u_i+0,\ v_j-0}{\Delta}}(g) + f(u_i+0,\ v_j+0)\overset{u_{i+1}-0,\ v_{j+1}-0}{\underset{u_i+0,\ v_j+0}{\Delta}}(g) \right\}\ ,$$

en faisant la modification nécessaire aux points $(u_i,\ v_j)$ situés sur la frontière du domaine d'intégration. Cette modification est régie par la convention de remplacer l'accroissement de $g$ en un intervalle (suffisamment petit) contenant des points frontières du domaine d'intégration par l'accroissement de $g$ dans la portion de l'intervalle comprise dans ce domaine ou par zéro, suivant que la frontière du domaine d'intégration est considérée comme lui appartenant ou comme ne lui appartenant pas.

On peut formuler la définition en langage géométrique simple indépendant du nombre $n$ des dimensions de l'espace envisagé.

Pour cela, nous appelons accroissement de $g(\mathrm{P})$ *à l'intérieur* d'un intervalle quelconque $(\mathrm{Q}_1\,\mathrm{Q}_2)$ ne se réduisant pas à un point

la limite[1] des accroissements de $g(P)$ dans une suite d'intervalles à $n$ dimensions ayant pour limite l'intervalle donné $(Q_1 Q_2)$ et contenant chacun des points intérieurs, mais non pas des sommets, de celui-ci.

L'accroissement de $g(P)$ en un point Q sera la limite de ses accroissements dans une suite d'intervalles ayant pour limite unique le point donné Q et contenant chacun ce point.

La fonction intégrande $f(P)$, constante par intervalles dans l'intervalle d'intégration (AB), y possède par définition un nombre fini de valeurs distinctes, dont chacune correspond à un nombre fini de points et d'intervalles ouverts.

Son intégrale par rapport à $g(P)$ s'obtient alors en faisant *la somme des produits de la valeur de* f(P) *par l'accroissement de* g(P) *à l'intérieur de chacun de ces intervalles et en chacun de ces points.*

---

# SUR LES MÉTHODES QUI SERVENT A LIMITER SUPÉRIEUREMENT LES MODULES DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

---

1. MM. CARMICHEL et MASON ont démontré que la valeur absolue de chaque racine $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de l'équation:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

satisfait à la condition:

$$|x_i| < \sqrt{1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_{n-1}|^2 + |a_n|^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

[1] Cette limite est en effet unique: car chaque sommet d'un intervalle de la suite tend vers un point déterminé en restant dans un même quadrant ayant son sommet en ce point.