SUR LES MÉTHODES QUI SERVENT A. LIMITER SUPÉRIEUREMENT LES MODULES DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Autor(en): **Lomnicki, Antoine**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515754

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

la limite[1] des accroissements de $g(P)$ dans une suite d'intervalles à n dimensions ayant pour limite l'intervalle donné $(Q_1 Q_2)$ et contenant chacun des points intérieurs, mais non pas des sommets, de celui-ci.

L'accroissement de $g(P)$ en un point Q sera la limite de ses accroissements dans une suite d'intervalles ayant pour limite unique le point donné Q et contenant chacun ce point.

La fonction intégrande $f(P)$, constante par intervalles dans l'intervalle d'intégration (AB), y possède par définition un nombre fini de valeurs distinctes, dont chacune correspond à un nombre fini de points et d'intervalles ouverts.

Son intégrale par rapport à $g(P)$ s'obtient alors en faisant *la somme des produits de la valeur de* f(P) *par l'accroissement de* g(P) *à l'intérieur de chacun de ces intervalles et en chacun de ces points.*

SUR LES MÉTHODES QUI SERVENT A LIMITER SUPÉRIEUREMENT LES MODULES DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

---

1. MM. CARMICHEL et MASON ont démontré que la valeur absolue de chaque racine x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de l'équation:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

satisfait à la condition:

$$|x_i| < \sqrt{1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_{n-1}|^2 + |a_n|^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

[1] Cette limite est en effet unique: car chaque sommet d'un intervalle de la suite tend vers un point déterminé en restant dans un même quadrant ayant son sommet en ce point.

M. J. L. WALSCH[1] a démontré récemment la formule:

$$|x_i| \leqq |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a_3|} + \dots + \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (2')$$

et M. K. P. WILLIAMS a publié [2] l'inégalité suivante:

$$|x_i| < \sqrt{1 + |a_1 - 1|^2 + |a_2 - a_1|^2 + \dots + |a_n - a_{n-1}|^2 + |a_n|^2}$$
$$(i = 1, 2, \dots, n) \qquad (3)$$

On peut trouver — à l'aide de considérations tout-à-fait élémentaires — des inégalités, qui sont plus précises que (2) et (3) et de plus, on peut donner une méthode, qui est *la meilleure*, c'est-à-dire la plus précise parmi toutes les méthodes qui se servent exclusivement des *valeurs absolues des coefficients* de l'équation (1) et de même une méthode, qui est *la meilleure* parmi toutes les méthodes qui se servent exclusivement des *valeurs absolues des différences* des coefficients voisins. Un procédé convergent nous permet toujours de calculer ce meilleur *nombre-limite.*

2. Prenons comme point de départ l'inégalité:

$$|x_i| < 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = s_1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (4)$$

laquelle est évidente, si les modules des racines ne surpassent pas 1. Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour $|x_i| > 1$, nous tirons de l'équation (1) après l'avoir divisée par x^{n-1} la relation:

$$|x_i| \leqq |a_1| + \left|\frac{a_2}{x_i}\right| + \dots + \left|\frac{a_{n-1}}{x_i^{n-2}}\right| + \left|\frac{a_n}{x_i^{n-1}}\right| < |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

alors à plus forte raison la relation (4).

Remarque. Les nombres limites s_1 sont en général plus grands que les nombres fournis par (2) ou (3).

3. Nous pouvons maintenant former à l'aide de ce nombre s_1 un autre nombre limite s_2, qui sera meilleur, c'est-à-dire plus petit que s_1. On montre en effet, que:

$$|x_i| < \sqrt[n]{|a_1| s_1^{n-1} + |a_2| s_1^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| s_1 + |a_n|} = s_2 < s_1 .$$
$$(i = 1, 2, \dots, n) \qquad (5)$$

---

[1] J. L. WALSCH. *An inequality for the roots of an algebraic equation.* Annals of mathematics. Vol. 25, p. 285-6, 1924.

[2] K. P. WILLIAMS. *Note concerning the roots of an equation.* Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 28, p. 394-396. 1922.

Démonstration. L'équation (1) donne:

$$|x_i|^n \leqq |a_1||x_i|^{n-1} + |a_2||x_i|^{n-2} + \dots + |a_{n-1}||x_i| + |a_n| \,. \quad (6)$$

Mais $|x_i| < s_1$, alors s_1 étant positif:

$$|x_i|^n < |a_1| s_1^{n-1} + |a_2| s_1^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| s_1 + |a_n| \,,$$

d'où la première inégalité (5).

Il reste à prouver, que $s_2 < s_1$. En s'appuyant sur la définition de s_1 par (4), on voit que $|a_r|$ ne peut pas surpasser $s_1 - 1$; alors

$$s_2 \leqq \sqrt[n]{(s_1 - 1)(s_1^{n-1} + s_1^{n-2} + \dots + s_1 + 1)} = \sqrt[n]{s_1^n - 1} < s_1 \,.$$

4. Le même procédé appliqué au nombre s_2 donne un nombre limite encore meilleur $s_3 < s_2$. En effet:

$$|x_i| < \sqrt[n]{|a_1| s_2^{n-1} + |a_2| s_2^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| s_2 + |a_n|} = s_3 < s_2$$

comme il est aisé de voir en remarquant que la fonction

$$\sqrt[n]{|a_1| x^{n-1} + |a_2| x^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| x + |a_n|}$$

décroît d'une manière monotone si x décroit de s_1 à s_2.

5. L'itération successive nous donne la suite des nombres limites:

$$s_1 \,,\; s_2 \,,\; s_3 \,,\; \dots \,,\; s_k \,,\; \dots$$

définis par la formule récursive:

$$s_k = \sqrt[n]{|a_1| s_{k-1}^{n-1} + |a_2| s_{k-1}^{n-2} + \dots + |a_{n-1}| s_{k-1} + |a_n|} \quad (7)$$

pour tous les entiers $k > 1$ et par la formule (4) pour $k = 1$. Les termes de cette suite vont en décroissant et restent toujours plus grands qu'un nombre constant (égal au plus grand module des racines de l'équation proposée). La suite converge donc vers une limite s:

$$\lim_{k \to \infty} s_k = s \,. \quad (8)$$

Tous les s_k étant plus grands que les modules de toutes les

racines de l'équation (1), leur limite s ne peut pas s'abaisser au-dessous de ces modules on a alors:

$$|x_i| \leqq s \ .$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

La suite $\{s_k\}$ *définie par* (4) *et* (7) *donne pour les modules des racines de l'équation* (1) *des nombres limitants toujours meilleurs (décroissants) ; elle est convergente et sa limite* s *fournit un nombre limitant plus petit que tous les termes de la suite.*

Il faut remarquer que cette limite s n'est pas dans le cas général le module de la plus grande racine de l'équation donnée (1).

6. Passons aux limites dans la formule (7), nous trouvons:

$$s = \sqrt[n]{|a_1|s^{n-1} + |a_2|s^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}|s + |a_n|} \ ;$$

alors la limite s satisfait à l'équation

$$s^n - |a_1|s^{n-1} - |a_2|s^{n-2} - \ldots - |a_{n-1}|s - |a_n| = 0 \ . \qquad (9)$$

Comme cette équation a une racine positive *unique* α_M, notre limite s coincide avec celle-ci:

$$s = \alpha_M \ . \qquad (9')$$

Remarque. Pour tous les nombres positifs plus grands que α_M le polynôme (9) reste positif.

Nous retrouvons par cette voie le résultat suivant, dû à CAUCHY [1]:

Chacune des racines de l'équation (1) *offre un module inférieur à la racine positive unique* α_M *de l'équation auxiliaire:*

$$z^n - |a_1|z^{n-1} - |a_2|z^{n-2} - \ldots - |a_{n-1}|z - |a_n| = 0 \qquad (10)$$

c'est-à-dire qu'on a:

$$|x_i| \leqq \alpha_M \ . \qquad (10')$$

7. *Parmi toutes les méthodes, qui fournissent les nombres-limitant supérieurement les modules des racines de l'équation* (1) *en se*

---

[1] CAUCHY. Œuvres. I. sér. T. II., p. 289-299. C'est M. R. Hedrick qui m'a fait remarquer que ce théorème est dû à Cauchy.

servant exclusivement des modules de ses coefficients, les meilleures sont celles, qui déterminent la racine positive de l'équation auxiliaire (10), directement ou par les approximations successives supérieures.

Autrement dit une méthode qui se sert exclusivement des modules des coefficients ne peut pas fournir des résultats meilleurs, donc des nombres limitants plus petits que α_M. Pour le voir il suffit d'admettre, qu'une telle méthode donne pour (1) un nombre limite (positif) $t < \alpha_M$. La même méthode appliquée à l'équation auxiliaire fournirait le même nombre t limitant *supérieurement* les modules de toutes ses racines, donc aussi α_M, ce qui est absurde, parce qu'on a $t < \alpha_M$.

Ce résultat est presque évident. En effet, en se servant uniquement des modules des coefficients on détermine les nombres limites non seulement pour l'équation unique (1), mais pour tout l'ensemble des équations, dont les coefficients possèdent les mêmes modules. L'équation auxiliaire (10) appartient évidemment aussi à cet ensemble et le module de sa racine positive α_M est plus grand que tous les modules des racines des équations appartenant à cet ensemble. Car on conclut de la formule (6), qu'on a pour toute racine $x_i = \alpha$

$$|a|^n - |a_1||\alpha|^{n-1} - |a_2||\alpha|^{n-2} - \ldots - |a_{n-1}||\alpha| - |a_n| \leqq 0 ,$$

ce qui est impossible pour un nombre positif $|\alpha|$ plus grand que α_M (voir § 6. Remarque).

En estimant la valeur de la formule (2) de ce point de vue, on voit qu'elle ne peut nullement fournir un nombre limite meilleur que la limite idéale α_M, accessible par notre méthode et qu'elle fournira souvent certainement des plus grands nombres limites, par exemple toujours si $\alpha_M < 1$.

La formule (2) donne pour l'équation

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0 \tag{11}$$

l'inégalité $|x_i| < \sqrt{1+n}$, pendant que la meilleure méthode de ce type conduit à la racine positive de l'équation auxiliaire

$$z^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \ldots - z - 1 = 0 \tag{12}$$

qui reste pour tout n inférieure au nombre 2, comme il est aisé de le prouver. Nous avons alors $|x_i| \leqq \alpha_M < 2$. Cette valeur est meilleure pour $n \geqq 4$ et pour $n = 1, 2, 3$ on trouve à l'aide des équations auxiliaires:

$$z - 1 = 0 , \qquad z^2 - z - 1 = 0 , \qquad z^3 - z^2 - z - 1 = 0$$

les valeurs limites:

$$\alpha_M = 1 , \qquad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} , \qquad 1 . 8 \ldots$$

qui sont plus petites que les valeurs correspondantes:

$$t = \sqrt{2} , \quad \sqrt{3} , \quad \sqrt{4} ,$$

fournies par (2).

8. La recherche des méthodes qui se servent exclusivement des modules des *différences* des coefficients voisins, dont l'exemple est donné par la formule (3), se fait d'une manière analogue. Transformons l'équation (1) en introduisant une nouvelle racine $x = 1$, c'est-à-dire multiplions les deux côtés de l'équation (1) par $x - 1$. Il vient:

$$x^{n+1} + (a_1 - 1) x^n + (a_2 - a_1) x^{n-1} + \ldots + (a_n - a_{n-1}) x - a_n = 0 . \tag{13}$$

En appliquant à cette équation transformée la méthode précédemment formulée, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Le plus grand module des racines de l'équation (13) *et par conséquent de l'équation* (1) *ne peut pas surpasser la racine positive unique de l'équation auxiliaire:*

$$z^{n+1} - |a_1 - 1| z^n - |a_2 - a_1| z^{n-1} - \ldots - |a_n - a_{n-1}| z - |a_n| = 0 . \tag{14}$$

Parmi toutes les méthodes, qui fournissent les nombres limitant supérieurement les modules des racines de l'équation (1) *en se servant exclusivement des modules des différences des coefficients voisins de l'équation proposée, les meilleures sont celles, qui déterminent la racine positive de l'équation auxiliaire* (14) directement ou par les approximations successives supérieures.

La méthode exprimée par la formule (3) en particulier n'est dans aucun cas meilleure et devient en général moins précise. Par exemple notre méthode appliquée à l'équation (11) donne l'équation transformée $x^{n+1} - 1 = 0$ et l'équation auxiliaire de la même forme $z^{n+1} - 1 = 0$, dont la racine positive unique est $\beta_M = 1$. Nous avons alors obtenu la limite précise, pendant que la formule de M. WILLIAMS fournit seulement $|x_i| < 2$.

Il ne faut cependant pas croire, qu'on obtient par la méthode des modules des différences toujours des résultats meilleurs que ceux obtenus par la méthode des modules des coefficients. Cette dernière méthode se montre au contraire toujours moins précise si l'équation auxiliaire (10) a une racine positive moindre que 1, car nous avons introduit dans la seconde méthode la racine $x = 1$; alors la plus grande racine β_M de l'équation auxiliaire transformée reste toujours $\beta_M \geqq 1$.

Considérons encore un exemple numérique

$$x^2 - 4x + 3 = 0 . \tag{15}$$

La formule (10) donne ici $\alpha_M = 2 + \sqrt{5}$; alors $4 < \alpha_M < 5$ et la formule (14) donne une plus grande valeur $6 < \beta_M < 7$.

(La formule (2) donne $\sqrt{26}$ et la formule (3) $\sqrt{84}$, donc dans les deux cas des résultats moins satisfaisants que les résultats obtenus par les « meilleures » méthodes.)

9. Nous avons de cette manière obtenus les limites extrêmes, qu'on peut atteindre par ces deux types de méthodes. Il se pose la question, si l'on ne pourrait pas trouver d'autres méthodes assez simples et fournissant des limites plus précises pour les modules des racines. Les résultats que nous avons obtenus pour l'équation (15), par exemple, ne sont pas satisfaisants.

Or on parvient quelquefois aux résultats plus précis en formant la seconde, troisième, ... différence des coefficients voisins de l'équation. Mais on voit que la valeur des méthodes des différences ne diffère principalement pas de la valeur des méthodes que nous avons examinées.

Cependant une autre idée se montre féconde, à savoir l'introduction des nouvelles racines $x = u, v, \ldots$ autres que $x = 1$. On peut choisir les paramètres $u, v, \ldots$ de telle manière, qu'on obtienne un plus grand degré de précision.

En introduisant par exemple dans l'équation (15) une racine $x = u = -\frac{3}{4}$ nous trouvons pour α_M la valeur $3 \cdot 44 < \alpha_M < 3 \cdot 45$, qui est plus petite que les valeurs obtenues par les méthodes précédentes. En introduisant à la fois deux nouvelles racines $x = u = -3$ et $x = v = -1$, nous trouvons une valeur α_M contenue dans l'intervalle $3 \cdot 2 < \alpha_M < 3 \cdot 3$, donc plus précise encore que dans le cas précédent. L'étude approfondie des méthodes de cette espèce ne me semble pas privée d'intérêt.

UNE REPRÉSENTATION DE L'EXCÈS SPHÉRIQUE D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE (HAMILTON)

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

La présente note est rédigée d'après l'ouvrage de M. Tait sur les quaternions. Je rappelle en premier lieu des définitions et des propriétés des triangles sphériques qui en faciliteront la lecture.

Quotient de vecteurs — Verseurs — Arcs de grand cercle.

1. Soient α, β deux vecteurs OA, OB. Appelons quotient q de β par α une quantité définie par l'égalité

$$\beta = \alpha \times q \ ,$$

Ce qui donne

$$\alpha^{-1} . \beta = \alpha^{-1} . \alpha . q = q \ .$$

Nous poserons donc

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \alpha^{-1} . \beta \ ,$$

q est un quaternion. Quand les tenseurs de α et de β sont égaux, q est un verseur.