SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT DES DÉTERMINANTS

Autor(en): **Byck, Marie**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515757

Le procédé de démonstration employé plus haut se prête encore à d'autres généralisations. Par exemple, si l'on considère une courbe algébrique (C), où les termes de plus haut degré n ne contiennent que les puissances de y de même parité, on aura, pour les $2n$ points d'intersection de (C) et de l'ellipse, la relation

$$\sum_{1}^{2n} \varphi_h = 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \sum_{1}^{2n} \varphi_h = (2k+1)\pi \, ,$$

pour les $2\,n$ points d'intersection de (C) et de l'hyperbole, la relation

$$\sum_{1}^{2n} \varphi_h = 2k\pi i \qquad \text{ou} \qquad \sum_{1}^{2n} \varphi_h = (2k+1)\pi i \, ,$$

suivant que les exposants de y dans les termes de degré n sont pairs ou impairs.

SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS SONT DES DÉTERMINANTS

PAR

Marie Byck (Kieff).

---

1. On voit aisément que:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & p_2 & q_2 \\ 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} \; ;$$

de même,

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 & q_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 & q_3 \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} \, , \text{ etc.}$$

Supposons maintenant que dans le déterminant A les termes a_1, a_2 sont eux-mêmes des déterminants:

$$a_1 = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix}, \qquad a_2 = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix},$$

on aura

$$C = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & p_1 \; q_1 \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & p_2 \; q_2 \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & m_1 \; n_1 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} t_1 & u_1 & p_1 & q_1 \\ t_2 & u_2 & p_2 & q_2 \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \\ r_1 & s_1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

de même:

$$D = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_3 & u_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 & u_3 & p_3 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_1 & n_1 \\ 0 & 0 & r_1 & s_1 & 0 & 0 \\ v_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Passons au cas général lorsque les déterminants qui sont les éléments des déterminants A, B, C, D ne se distinguent pas seulement par une rangée (ligne ou colonne), mais sont arbitraires. Par exemple:

$$A' = \begin{vmatrix} a_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \qquad B' = \begin{vmatrix} a_1 \; b_1 & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 \; b_2 & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ a_3 \; b_3 & \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

$$C' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_3 & s_3 \\ t_3 & u_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Déterminons x et y de manière que dans le déterminant A′ on ait

$$\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ x & y \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$m_2 q_2 - p_2 n_2 = m_1 y - x n_1 .$$

Posons:

$$1)\quad m_2 q_2 = m_1 y\ , \qquad 2)\quad p_2 n_2 = n_1 x\ ,$$

d'où:

$$y = \frac{m_2 q_2}{m_1}\ , \qquad x = \frac{p_2 n_2}{p_1}\ .$$

Nous aurons

$$A' = \begin{vmatrix} a_1 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ a_2 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ \frac{n_2 p_2}{n_1} & \frac{m_2 q_2}{m_1} \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & q_1 \\ a_2 & \frac{n_2 p_2}{n_1} & \frac{m_2 q_2}{m_1} \\ 0 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = - \frac{1}{m_1 n_1} \begin{vmatrix} a_1 & n_1 p_1 & m_1 q_1 \\ a_2 & n_2 p_2 & m_2 q_2 \\ 0 & m_1 n_1 & m_1 n_1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & n_1 p_1 & m_1 q_1 \\ a_2 & n_2 p_2 & m_2 q_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 q_1 & n_1 p_1 \\ a_2 & m_2 q_2 & n_2 p_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\ ,$$

$$C' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_2 & s_2 \\ t_2 & u_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ t_1 & u_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ \frac{t_2 s_2}{s_1} & \frac{u_2 r_2}{r_1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ \frac{p_2 n_2}{n_1} & \frac{q_2 m_2}{m_1} \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} t_1 & u_1 & p_1 & q_1 \\ \frac{t_2 s_2}{s_1} & \frac{u_2 r_2}{r_1} & \frac{p_2 n_2}{n_1} & \frac{q_2 m_2}{m_1} \\ 0 & 0 & m_1 & n_1 \\ r_1 & s_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r_1 s_1 m_1 n_1} \begin{vmatrix} t_1 s_1 & r_1 u_1 & p_1 n_1 & m_1 q_1 \\ t_2 s_2 & r_2 u_2 & p_2 n_2 & m_2 q_2 \\ 0 & 0 & m_1 n_1 & m_1 n_1 \\ r_1 s_1 & r_1 s_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} t_1 s_1 & r_1 u_1 & p_1 n_1 & m_1 q_1 \\ t_2 s_2 & r_2 u_2 & p_2 n_2 & m_2 q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 u_1 & t_1 s_1 & m_1 q_1 & p_1 n_1 \\ r_2 u_2 & t_2 s_2 & m_2 q_2 & p_2 n_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\ .$$

Et en général:

$$\left|\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k_1 & l_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k_2 & l_2 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_3 & f_3 \\ g_3 & h_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k_3 & l_3 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_1 d_1 & c_1 b_1 & e_1 h_1 & g_1 f_1 & k_1 n_1 & m_1 l_1 \\ a_2 d_2 & c_2 b_2 & e_2 h_2 & g_2 f_2 & k_2 n_2 & m_2 l_2 \\ a_3 d_3 & c_3 b_3 & e_3 h_3 & g_3 f_3 & k_3 n_3 & m_3 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si dans cette égalité nous posons:

$$a_3 = a_2 = a_1, \qquad f_3 = f_2 = f_1,$$
$$b_3 = b_2 = b_1, \qquad k_3 = k_2 = k_1,$$
$$e_3 = e_2 = e_1, \qquad l_3 = l_2 = l_1,$$

nous aurons

$$\begin{vmatrix} a_1 d_1 & c_1 b_1 & e_1 h_1 & g_1 f_1 & k_1 n_1 & m_1 l_1 \\ a_1 d_2 & c_2 b_1 & e_1 h_2 & g_2 f_1 & k_1 n_2 & m_2 l_1 \\ a_1 d_3 & c_3 b_1 & e_1 h_3 & g_3 f_1 & k_1 n_3 & m_3 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 b_1 e_1 f_1 k_1 l_1 \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & h_1 & g_1 & n_1 & m_1 \\ d_2 & c_2 & h_2 & g_2 & n_2 & m_2 \\ d_3 & c_3 & h_3 & g_3 & n_3 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{l_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_1} & \frac{1}{f_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & h_1 & g_1 & n_1 & m_1 \\ d_2 & c_2 & h_2 & g_2 & n_2 & m_2 \\ d_3 & c_3 & h_3 & g_3 & n_3 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_1 & k_1 \\ 0 & 0 & f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & g_1 & h_1 & m_1 & n_1 \\ c_2 & d_2 & g_2 & h_2 & m_2 & n_2 \\ c_3 & d_3 & g_3 & h_3 & m_3 & n_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & l_1 \\ 0 & 0 & e_1 & f_1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ce qui est d'accord avec D.

2. — *Réduction du déterminant de l'ordre 2q en un déterminant de l'ordre q.* — Le résultat obtenu suggère l'idée de l'abaissement de l'ordre du déterminant, par une simple soustraction de colonnes; la seconde de la première; la quatrième de la troisième, etc. Dans le cas où nous avons un déterminant de la forme

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & \ldots & \ldots & a_1^{2q-1} & a_1^{2q} \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & \ldots & \ldots & a_2^{2q-1} & a_2^{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_q^1 & a_q^2 & a_q^3 & a_q^4 & \ldots & \ldots & a_q^{2q-1} & a_q^{2q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

les opérations indiquées conduisent au déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - a_1^2 & a_1^3 - a_1^4 & \ldots & a_1^{2q-1} - a_1^{2q} \\ a_2^1 - a_2^2 & a_2^3 - a_2^4 & \ldots & a_2^{2q-1} - a_2^{2q} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_q^1 - a_q^2 & a_q^3 - a_q^4 & \ldots & a_q^{2q-1} - a_q^{2q} \end{vmatrix}.$$

On voit donc qu'après avoir transformé un déterminant arbitraire d'ordre $2q$ en un autre qui présente en des places convenablement choisies des zéros et des unités, on peut, par de simples soustractions, le ramener à un déterminant d'ordre q.