Sur le théorème de Kariya.

Autor(en): **Deaux, Roland**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Le premier membre de la formule (F) contient donc toutes les puissances d'exposants entiers non négatifs de la variable q. Il en est alors de même du second membre. Nous en concluons le théorème suivant: *N'importe quel entier peut s'obtenir par l'addition d'un carré, et de trois triangulaires dont deux sont égaux.* Exemples:

$$16 = 16+0+0+0 = 9+1+3+3 = 4+10+1+1 = 4+6+3+3$$
$$= 4+0+6+6 = 1+15+0+0 = 1+3+6+6 = 0+10+3+3\ ;$$
$$18 = 16+0+1+1 = 9+3+3+3 = 1+15+1+1 = 0+6+6+6\ .$$

Marcel WINANTS (Liége).

Sur le théorème de Kariya.

A propos d'un article de M. H. LEBESGUE.

1. M. H. LEBESGUE généralise, dans les numéros 5-6 de l'*Enseignement mathématique* (tome XXIII, p. 292), le théorème de KARIYA. Il l'énonce: *si S et* s *sont pôle et polaire par rapport à la conique Σ par rapport à laquelle deux triangles homologiques T et* t *sont polaires réciproques, le couple (S,* s*) définit des homologies qui transforment* t *(ou T) en triangles homologiques avec T (ou* t*).*

Sous cette forme le théorème est rattaché à une grande théorie: celle des pôles et polaires dans les coniques. La démonstration qu'en donne M. LEBESGUE (p. 296) peut être présentée simplement sur une conique générale. Celle que nous donnons ci-dessous nous a été enseignée par notre éminent maître, M. Cl. SERVAIS, professeur à l'Université de Gand; non pas pour justifier le théorème de Kariya mais pour établir l'existence et les propriétés des coniques conjuguées. Nous prouvons ainsi que le théorème de M. Lebesgue est un corollaire de la théorie des coniques conjuguées, étudiée par PONCELET dans le cas de l'homologie harmonique.

2. *Théorème classique.* — Deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ tels que les sommets A, B, C de l'un sont les pôles des côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 de l'autre par rapport à une conique réelle ou idéale Σ sont dits réciproques par rapport à Σ; ils sont homologiques. Les couples B, C et B_1, C_1 peuvent être imaginaires conjugués.

En effet, soient B', C', D, E les points d'intersection de BC avec A_1C_1, A_1B_1, A_1A, B_1C_1 et F le point (AA_1 — B_1C_1). Puisque un faisceau de droites est projectif à la ponctuelle des pôles de ces droites, on a successivement

$$A_1(BCDE) \barwedge (B'C'ED) \barwedge A_1(B'C'ED) \barwedge (C_1B_1EF)\ .$$

Donc

$$(BCDE) \barwedge (B_1C_1FE)$$

et les droites BB_1, CC_1, AA_1 sont concourantes.

3. — *Coniques conjuguées. — Un point réel S et sa polaire* s *dans un système polaire plan* Σ *étant pris pour centre et pour axe d'une homologie dont le coefficient* λ *est donné, à tout point réel ou imaginaire* M *du plan correspond un point* M_1 *du même plan. Si* m *est la polaire du point* M *dans le système polaire* Σ, *le point* M_1 *et la droite* m *sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire* Σ'.

En effet 1° les points M et M_1 étant correspondants dans deux figures homologiques et d'autre part le point M et la droite m étant correspondants dans deux systèmes plans réciproques, on en conclut que les systèmes plans (M_1) et (m) décrits par les éléments M_1 et m sont réciproques.

2° Si STU est un triangle autopolaire de Σ, les points S, T, U, qui correspondent à eux-mêmes dans l'homologie (S, s) ont donc pour homologues dans les systèmes réciproques superposés (M_1) et (m) les côtés opposés TU, US, ST du triangle STU. Par suite les systèmes (M_1) et (m) sont involutifs et les éléments M_1 et m sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire Σ'.

Les coniques directrices (Σ) et (Σ'), réelles ou idéales, des systèmes polaires Σ et Σ' *sont dites conjuguées* relativement au pôle S et à la polaire s. Le couple de points TU conjugués dans Σ sont aussi conjugués dans Σ'. Ce couple étant arbitraire sur s, les systèmes polaires Σ et Σ' ont une involution de points conjugués, commune sur s. Comme s a d'ailleurs même pôle S dans les deux systèmes, *deux coniques conjuguées ont un double contact.*

4. *Théorème de M. Lebesgue.* — Si $T \equiv ABC$ et $t \equiv abc$ sont deux triangles homologiques, ils définissent un système polaire Σ dans lequel T et t sont réciproques. Si S et s sont pôle et polaire dans Σ, une homologie quelconque de centre S et d'axe s transforme T en un triangle T_1 qui est (n° 3) réciproque de t dans un système polaire Σ' et par suite (n° 2) homologique avec t.

On peut ajouter que toutes les coniques (Σ') ont, avec (Σ), un double contact réel ou idéal sur s.

Il est clair que l'on peut substituer t à T puisque ces deux triangles sont réciproques dans Σ.

Ecole des Mines de Mons, le 20 décembre 1924.

Roland DEAUX.

Transformation d'une somme de carrés en développement limité ou illimité.

Considérons n nombres rationnels, entiers ou non, positifs, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$ et leur moyenne arithmétique A. En calculant les *écarts* par rapport à la moyenne, on obtient n nombres, les uns positifs et les autres négatifs; on démontre facilement que leur somme est nulle.