Transformation d'une somme de carrés en développement limité ou illimité.

Autor(en): **Hochstaetter, Max**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. — *Coniques conjuguées. — Un point réel S et sa polaire* s *dans un système polaire plan* Σ *étant pris pour centre et pour axe d'une homologie dont le coefficient* λ *est donné, à tout point réel ou imaginaire* M *du plan correspond un point* M_1 *du même plan. Si* m *est la polaire du point* M *dans le système polaire* Σ, *le point* M_1 *et la droite* m *sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire* Σ'.

En effet 1° les points M et M_1 étant correspondants dans deux figures homologiques et d'autre part le point M et la droite m étant correspondants dans deux systèmes plans réciproques, on en conclut que les systèmes plans (M_1) et (m) décrits par les éléments M_1 et m sont réciproques.

2° Si STU est un triangle autopolaire de Σ, les points S, T, U, qui correspondent à eux-mêmes dans l'homologie (S, s) ont donc pour homologues dans les systèmes réciproques superposés (M_1) et (m) les côtés opposés TU, US, ST du triangle STU. Par suite les systèmes (M_1) et (m) sont involutifs et les éléments M_1 et m sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire Σ'.

Les coniques directrices (Σ) et (Σ'), réelles ou idéales, des systèmes polaires Σ et Σ' *sont dites conjuguées* relativement au pôle S et à la polaire s. Le couple de points TU conjugués dans Σ sont aussi conjugués dans Σ'. Ce couple étant arbitraire sur s, les systèmes polaires Σ et Σ' ont une involution de points conjugués, commune sur s. Comme s a d'ailleurs même pôle S dans les deux systèmes, *deux coniques conjuguées ont un double contact.*

4. *Théorème de M. Lebesgue.* — Si $T \equiv ABC$ et $t \equiv abc$ sont deux triangles homologiques, ils définissent un système polaire Σ dans lequel T et t sont réciproques. Si S et s sont pôle et polaire dans Σ, une homologie quelconque de centre S et d'axe s transforme T en un triangle T_1 qui est (n° 3) réciproque de t dans un système polaire Σ' et par suite (n° 2) homologique avec t.

On peut ajouter que toutes les coniques (Σ') ont, avec (Σ), un double contact réel ou idéal sur s.

Il est clair que l'on peut substituer t à T puisque ces deux triangles sont réciproques dans Σ.

Ecole des Mines de Mons, le 20 décembre 1924.

Roland DEAUX.

Transformation d'une somme de carrés en développement limité ou illimité.

Considérons n nombres rationnels, entiers ou non, positifs, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$ et leur moyenne arithmétique A. En calculant les *écarts* par rapport à la moyenne, on obtient n nombres, les uns positifs et les autres négatifs; on démontre facilement que leur somme est nulle.

Posons

$$e = a - A \ , \qquad \text{d'où} \qquad a = A + e \ ,$$

$$a^2 = A^2 + e^2 + 2Ae \ ,$$

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma e^2 + 2A\Sigma e \ .$$

Mais $\Sigma e = 0$, et l'égalité ci-dessus se réduit à

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma e^2 \ . \qquad (1)$$

Les relations précédentes, bien connues, sont employées en Statistique; la formule 1 montre que la moyenne quadratique de n nombres est supérieure à leur moyenne arithmétique (en excluant le cas où les nombres sont égaux).

En généralisant la formule 1, on est conduit à une remarque assez curieuse qui fait l'objet de cette Note.

Désignons par a_1 les e pris en valeur absolue, par A_1 leur moyenne arithmétique, par a_2 les nouveaux écarts pris en valeur absolue, et ainsi de suite.

La formule 1 peut s'écrire

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma a_1^2 \ ,$$

et on a, d'une manière analogue,

$$\Sigma a_1^2 = nA_1^2 + \Sigma a_2^2 \ ,$$

d'où

$$\Sigma a^2 = n(A^2 + A_1^2) + \Sigma a_2^2 \ .$$

On voit donc apparaître une loi de formation

$$\Sigma a^2 = n\left(A^2 + A_1^2 + \ldots + A_{p-1}^2\right) + \Sigma a_p^2 \ . \qquad (2)$$

Si on part, par exemple, des quatre nombres 24, 40, 56, 216, et si on opère comme il a été dit, on constate que les a_5 sont tous égaux et que, par suite, les a_6 sont nuls.

$$24^2 + 40^2 + 56^2 + 216^2 = 4(84^2 + 66^2 + 33^2 + 19^2 + 11^2 + 3^2) \ .$$

Dans cet exemple le développement est *limité*; on peut se demander s'il en est toujours ainsi. Autrement dit, finit-on par obtenir, en poussant assez loin les opérations,

$$\Sigma a^2 = n\left(A^2 + A_1^2 + \ldots A_{p-1}^2\right) \ ? \qquad (3)$$

Il va sans dire qu'il n'y a aucun intérêt *pratique* à remplacer une somme de quatre carrés par une somme de six carrés, comme dans

l'exemple ci-dessus; si cette recherche présente quelque intérêt, il est d'ordre spéculatif.

Voici les résultats obtenus jusqu'ici; faute de place nous n'indiquons pas les démonstrations.

I. — n est un nombre entier *quelconque :*

a) le développement est *limité* si les n nombres sont égaux.
b) le développement est *illimité* si $n - 1$ nombres sont égaux.

II. — n est un nombre *impair :*

le développement est *illimité*, excepté si les nombres sont égaux (voir I*a*).

III. — n est un nombre *pair :*

a) les nombres forment une progression arithmétique; le développement est *limité* si n est une puissance de 2 et *illimité* dans le cas contraire.

b) le développement est *limité* si $\frac{n}{2}$ nombres sont égaux à α et si $\frac{n}{2}$ nombres sont égaux à β.

c) $n = 2$; le développement est *limité.*

d) $n = 4$; le développement est *limité*, excepté si 3 nombres sont égaux (voir I *b*).

e) $n = 6$; le développement est *limité*:

1° si la suite présente la forme particulière α, α, α, β, β, β (voir III *b*);

2° si une suite présentant cette forme apparaît au cours des calculs; on a alors $\beta = 3\alpha$; il faut que *toutes* les suites précédentes d'écarts contiennent un nombre pair de termes négatifs; la condition est nécessaire mais non suffisante.

f) $n = 6$; si la suite initiale présente la forme particulière α, β, $\alpha + \beta$, γ, δ, $\gamma + \delta$, elle engendre des suites ayant la même particularité; le développement est *illimité.*

La question est donc complètement résolue pour n impair; par contre, pour n pair elle n'est résolue que dans des cas particuliers et il ne semble pas aisé de découvrir un critère général.

Ce problème a-t-il été déjà étudié ?

Genève, 2 décembre 1924. Max HOCHSTAETTER.