II

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant, ou groupe *fondamental*; c'est ainsi qu'on est arrivé à dire: « l'espace euclidien », « l'espace affine », etc., au lieu de « l'espace dans lequel on n'étudie que les propriétés des figures invariantes par le groupe euclidien, le groupe affine, etc. » Chacun de ces espaces est *homogène*, en ce sens que ses propriétés restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental correspondant.

Plusieurs années avant le Programme d'Erlangen, B. RIEMANN avait introduit, dans son mémoire célèbre: « *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*[1] », des espaces *non homogènes* au sens qui vient d'être donné à cette expression. Dans ces espaces le carré de la distance de deux points infiniment voisins était défini par une forme différentielle, jusqu'à un certain point arbitraire, mais qu'en fait, on a toujours supposée quadratique. Ces espaces ont fait l'objet de nombreux et importants travaux, principalement en Allemagne et en Italie[2]. Mais ils ont surtout pris une importance considérable depuis que M. EINSTEIN, par la théorie de la relativité généralisée, a essayé, en identifiant notre Univers à un espace de Riemann, de réunir en une seule et même théorie la gravitation, l'optique et l'électromagnétisme. Le mouvement d'idées auquel cette théorie a donné naissance a conduit, par des généralisations importantes, à des espaces nouveaux; il suffira de citer les espaces de M. H. WEYL et les espaces de M. EDDINGTON. Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie; est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je me propose d'examiner.

II

A première vue, la notion de groupe semble étrangère à la géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent l'homo-

---

[1] B. RIEMANN, *Gesammelte math. Werke*, Leipzig (1876), p. 254–269.

[2] Il nous suffira de citer les noms de E.-B. CHRISTOFFEL, R. LIPSCHITZ, A. VOSS, G. RICCI, L. BIANCHI et T. LEVI-CIVITA.

généité d'aucun espace à groupe fondamental. Néanmoins, si un espace de Riemann ne possède pas une homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale; au voisinage immédiat d'un point donné il est assimilable à un espace euclidien. Toutefois si deux petits morceaux voisins d'un espace de Riemann peuvent être assimilés chacun à un petit morceau d'espace euclidien, ces deux petits morceaux sont sans lien entre eux, ils ne peuvent pas, *sans convention nouvelle*, être regardés comme appartenant à un seul et même espace euclidien. Autrement dit, un espace de Riemann admet, au voisinage d'un point A, une rotation autour de ce point, mais une translation, même considérée dans les effets qu'elle produit sur une région très petite de l'espace, n'a pas de sens. Or, c'est le développement même de la théorie de la relativité, liée par l'obligation paradoxale d'interpréter dans et par un Univers non homogène les résultats de nombreuses expériences faites par des observateurs croyant à l'homogénéité de cet Univers, qui permit de combler en partie le fossé qui séparait les espaces de Riemann de l'espace euclidien. Le premier pas dans cette voie fut l'œuvre de M. Levi-Civita, par l'introduction de sa notion de *parallélisme*[1].

Voici comment, grâce à cette notion, les choses peuvent être présentées. On peut imaginer, en chaque point d'un espace de Riemann, un *espace euclidien* (fictif) *tangent*, dont ce point et les points infiniment voisins font partie; la définition du parallélisme de M. Levi-Civita permet alors de raccorder en un seul les espaces euclidiens tangents en deux points infiniment voisins quelconques; autrement dit, elle confère à l'espace de Riemann une *connexion euclidienne*. Si l'on considère dans l'espace de Riemann une ligne continue AB, on peut raccorder de proche en proche en un seul les espaces euclidiens tangents aux différents points de AB; par suite aussi, aux infiniment petits près du second ordre, tous les points de l'espace de Riemann voisins de la ligne AB viendront, par cette espèce de *développement*, se localiser dans l'espace euclidien tangent en A. Le mot *développement* est mis là à dessein. Si en effet on applique le procédé qui vient

[1] *Rend. Circ. mat. di Palermo*, t. 42 (1917), p. 173-205.

d'être indiqué à une surface ordinaire, regardée comme un espace de Riemann à deux dimensions défini par le ds^2 de la surface, le raccord de proche en proche des plans (euclidiens) tangents à une ligne AB tracée sur la surface est identique au développement classique sur un plan de la développable circonscrite à la surface le long de AB.

Comme on le voit, la notion de parallélisme de M. Levi-Civita permet d'assimiler à un vrai espace euclidien, ou du moins à une portion de cet espace, toute la région d'un espace de Riemann qui avoisine un arc de courbe quelconque AB tracé dans l'espace donné. La différence essentielle qui subsiste encore entre un espace de Riemann et l'espace euclidien est la suivante: Si l'on joint un point A à un point B par deux chemins différents, ACB, AC'B, et qu'on développe sur l'espace euclidien tangent en A les deux régions qui entourent ces deux chemins, on n'obtiendra dans les deux cas, pour le point B et le petit morceau d'espace qui l'entoure, ni la même position ni la même orientation. Autrement dit, le développement de l'espace euclidien tangent, quand on se déplace dans l'espace de Riemann, n'est pas *holonome*. Au lieu de dire que l'espace de Riemann est à connexion euclidienne, on peut dire que c'est un espace euclidien non holonome. Mais il est important de remarquer qu'il ne l'était pas par lui-même, je veux dire par son seul ds^2; *il l'est devenu par la définition du parallélisme de M. Levi-Civita.*

III

Cette manière d'envisager la notion de parallélisme est, je crois, celle qui va le mieux au fond des choses. Ce serait restreindre sa portée que de n'y voir, comme on l'a fait en général, qu'un procédé de comparaison des vecteurs issus de deux points infiniment voisins; il faut y voir au contraire un moyen d'introduire dans un espace de Riemann toute la gamme des déplacements de l'espace euclidien, du moins en ce qui concerne les effets qu'ils produisent dans une région infiniment petite de l'espace.

Le point de vue habituel permet la fondation de la géométrie affine non holonome, parce que la notion de l'équipollence de