Sur la dérivation des séries terme à terme.

Autor(en): **Rivier, W.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la dérivation des séries terme à terme.

Etant donnée une série $\sum u_k(x)$ *convergente pour toute valeur de* x *appartenant à un intervalle donné* (a, b), *si les dérivées* $u'_k(x)$ *des termes de cette série sont des fonctions bien définies de* x *partout dans l'intervalle considéré, et si, de plus, la série* $\sum u'_k(x)$ *est uniformément convergente dans cet intervalle, cette dernière série représente, dans l'intervalle* (a, b), *la dérivée de la fonction* f(x) *définie par la série proposée.*

Pour démontrer ce théorème je m'appuie: 1° sur le théorème des accroissements finis, applicable, comme on sait, à une fonction d'une variable dans tout intervalle où cette fonction admet une dérivée partout bien définie; 2° sur le fait qu'une série qui a pour termes des fonctions de x continues dans un intervalle donné, et qui, en outre, est uniformément convergente dans cet intervalle, représente, dans cet intervalle, une fonction continue de x.

Soient x et x_0 deux nombres quelconques de l'intervalle (a, b). On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} . \tag{1}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} \quad \text{pour} \quad x \neq x_0 && (2) \\ \varphi_k(x_0) &= u'_k(x_0) . && (3) \end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Les fonctions φ_k ainsi définies sont évidemment continues pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b). De plus, je dis que la série $\sum \varphi_k(x)$ est uniformément convergente dans cet intervalle. En effet, pour chaque couple d'entiers positifs n et p, on a

$$\sum_{n+1}^{n+p} \varphi_k(x) = \sum_{n+1}^{n+p} u'_k(\xi_{n,p}) , \tag{4}$$

$\xi_{n,p}$ représentant un nombre compris dans l'intervalle (x_0, x). Cette relation, qui se réduit à une identité en vertu de (3), quand $x = x_0$, se déduit de (2), quand x est différent de x_0, en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction $\sum_{n+1}^{n+p} u_k(x)$ à dérivées bien définies partout dans l'intervalle (a, b). Or, soit une quantité positive ε choisie à l'avance aussi petite que l'on voudra; par hypothèse, on aura, à partir d'une valeur de l'entier n suffisamment grande, quel que soit l'entier positif p, et pour toute valeur de ξ appartenant à l'intervalle (a, b):

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty} u'_k(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| \sum_{n+p+1}^{\infty} u'_k(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} u'_k(\xi) \right| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} u'_k(\xi) - \sum_{n+p+1}^{\infty} u'_k(\xi) \right| < \varepsilon .$$

donc, en vertu de (4), pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b)

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon .$$

La convergence uniforme de la série $\Sigma \varphi_k(x)$ dans l'intervalle (a, b) est ainsi établie. Cette série représente donc dans cet intervalle une fonction continue de x, et l'on pourra en particulier écrire

$$\lim_{x=x_0} \sum \varphi_k(x) = \sum \varphi_k(x_0) ,$$

c'est-à-dire, en vertu de (2), (1) et (3)

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum u'_k(x_0) .$$

C. Q. F. D.

Ce théorème [1] se trouve démontré d'une manière un peu différente dans les deux dernières éditions du *Cours d'Analyse* de M. Goursat.

15 novembre 1926. W. Rivier (Lausanne).

---

[1] On trouvera une forme plus générale de ce théorème dans le traité de H. Knopp, *Theörie u. Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 343, Satz 4, 2e édition. — Note de la Rédaction.