Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE
Autor: Streit, Dr Phil. A.
Kapitel: 3. — Carré construit sur un côté d'un triangle
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nous pouvons donc envisager la relation $h'^2 = a'a'' \pm bb''$ relative à un triangle *acutangle* ou *obtusangle* en A, c'est-à-dire le théorème II′, comme étant la *généralisation* du théorème énoncé ci-dessus et relatif à un triangle *rectangle.*

Si l'on tient compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* — c'est-à-dire le théorème II′ — peut s'énoncer comme suit:

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur chaque hauteur est équivalent à la somme algébrique du rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant et du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, la surface d'un des rectangles devant être prise négativement si l'un des segments qui deviennent ses dimensions est négatif.*

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 4).

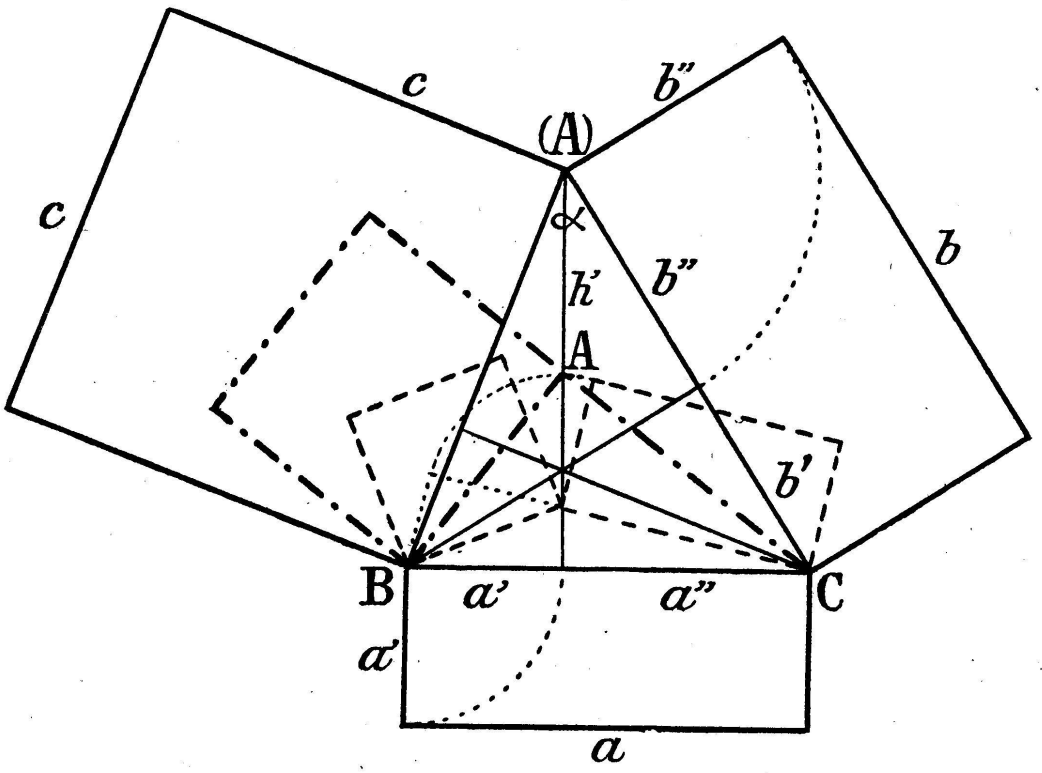

Fig. 4.

Le théorème II donne

$$h'^2 = a'a'' + bb''.$$

Mais

$$h'^2 = c^2 - a'^2 .$$

Par suite

$$c^2 - a'^2 = a'a'' + bb'' ,$$

d'où

$$c^2 = a'^2 + a'a'' + bb'' =$$
$$= a'(a' + a'') + bb'' .$$
$$c^2 = aa' + bb'' .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = bb' + cc'' , \\ b^2 = cc' + aa'' , \\ c^2 = aa' + bb'' , \end{array} \right. \tag{3}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME III. — *Dans tout triangle* ACUTANGLE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est égal à la somme des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

SECOND CAS. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$) (fig. 4).

En effectuant sur les formules (2') les mêmes transformations que, dans le premier cas, sur les formules (2) et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit au résultat suivant

$$\alpha > 90° ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = bb' + cc'' , \\ b^2 = - cc' + aa'' , \\ c^2 = aa' - bb'' . \end{array} \right. \tag{3'}$$

Le carré du côté *opposé* à l'angle obtus est donc égal à la *somme* des rectangles, tandis que le carré d'un côté *adjacent* est égal à la *différence* des deux rectangles dont le plus grand correspond au côté opposé à l'angle obtus:

THÉORÈME III'. — *Dans un triangle* OBTUSANGLE, *le carré construit sur un côté est égal à la somme ou à la différence des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui, suivant que ce premier côté est opposé ou adjacent à l'angle obtus.*

Remarque 1. — Si l'on observe la règle des signes des segments (voir 2, remarque 1), c'est-à-dire si l'on considère comme *négatif* un segment situé en entier sur le prolongement du côté, les formules (3) sont alors valables pour un triangle obtusangle comme pour un triangle acutangle, c'est-à-dire pour un triangle *quelconque.*

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 4) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Dans un triangle rectangle, le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse entière et la projection de ce côté sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ , \qquad c^2 = aa' .$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h', a et a' restant invariables.

1° Si A s'éloigne de a, donc si α diminue et devient par conséquent *aigu,* le carré construit sur le côté (c) *augmente du rectangle* bb'', car on a alors, d'après le théorème III relatif au triangle *acutangle,*

$$\alpha < 90^\circ , \qquad \underline{c^2 = aa' + bb''} .$$

2° Si par contre A se rapproche de a, donc si α augmente et devient par conséquent *obtus*, le carré construit sur le côté (c) *diminue du rectangle* bb'', car on a, dans ce cas, d'après le théorème III′ applicable au triangle *obtusangle* en A,

$$\alpha > 90^\circ , \qquad \underline{c^2 = aa' - bb''} .$$

D'ailleurs, pour $\alpha = 90^\circ$, la troisième des formules (3)

$$c^2 = aa' + bb''$$

devient précisément, b'' étant nul,

$$\alpha = 90^\circ , \qquad c^2 = aa' .$$

Le théorème III, ou plus généralement la relation

$$c^2 = aa' \pm bb''$$

relative au triangle acutangle ou obtusangle en A, est donc la GÉNÉRALISATION du théorème ci-dessus relatif au triangle *rectangle.*

En tenant compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III':

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 5).

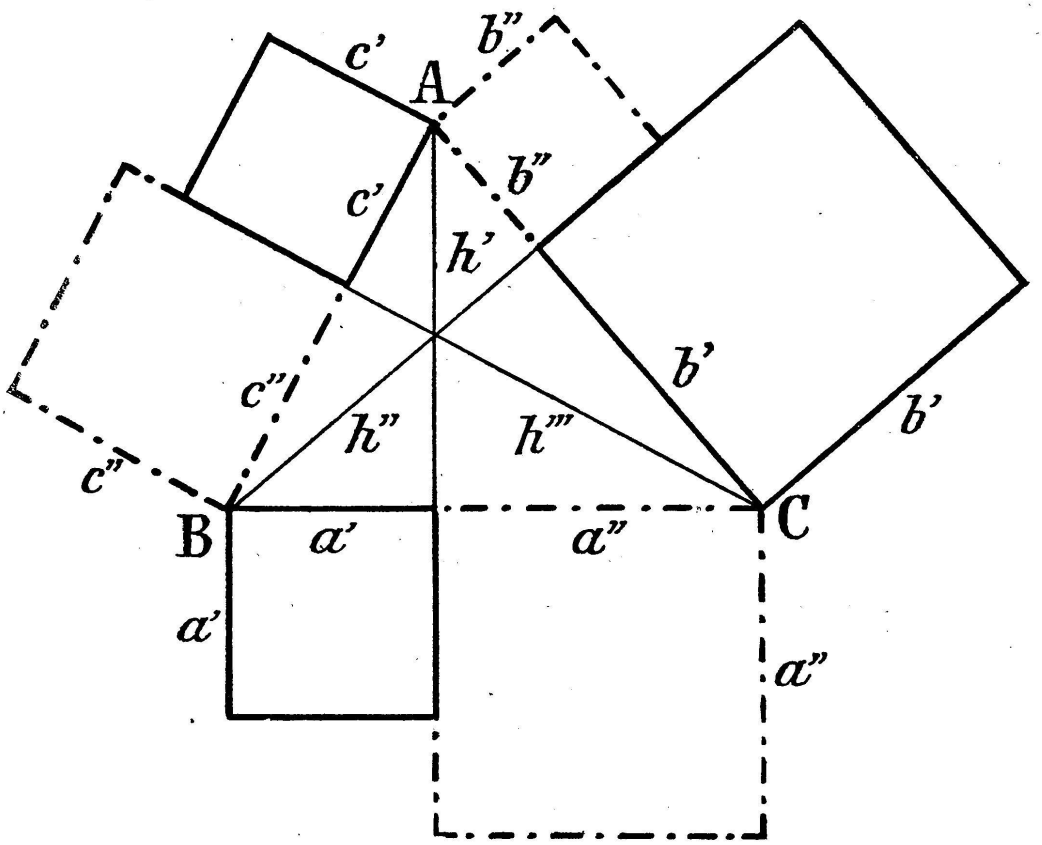

Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2 . (a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$