4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

En tenant compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III':

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 5).

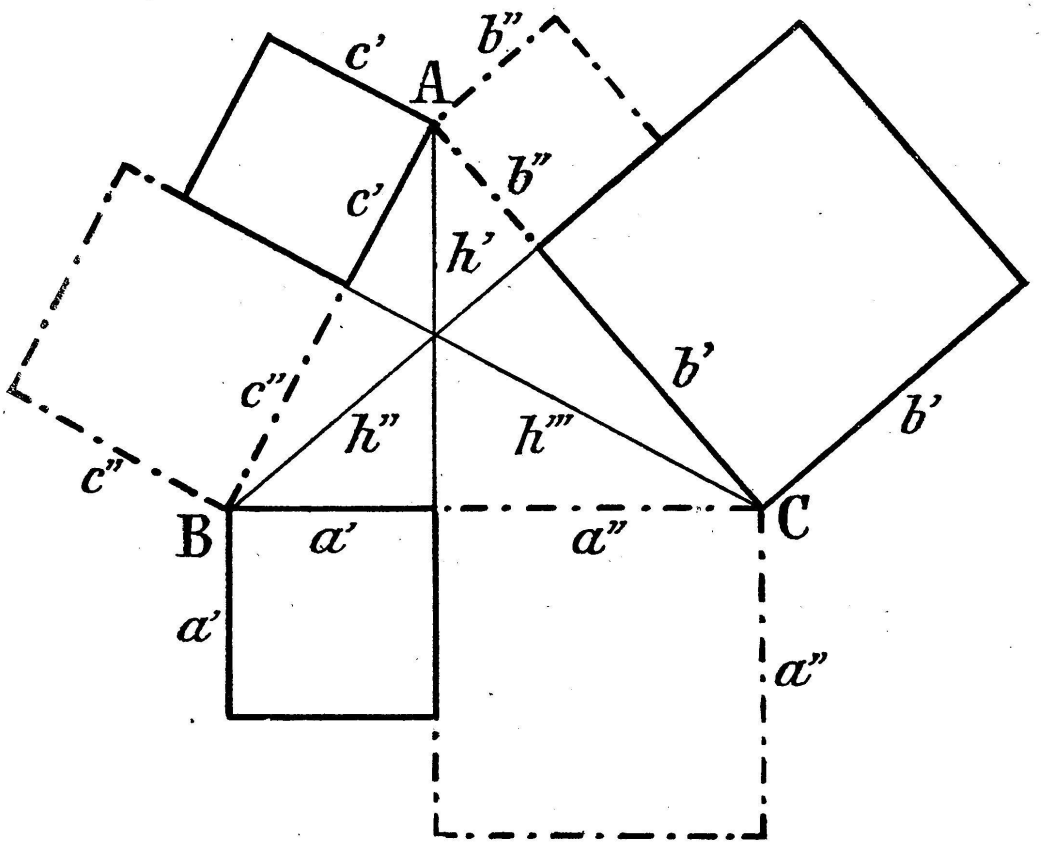

Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2 . (a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'a'' + c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + aa' = b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + bb' = c'c'' + b'b'' + b'^2 ;$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2.(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} . \qquad (4)$$

Second cas. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$).
Ici, $a = a' + a''$; $b = b' - b''$; $c = c'' - c'$.
Les formules (2'), première forme, peuvent donc s'écrire

$$h'^2 = a'a'' - bb'' = a'a'' - b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + cc'' = - b'b'' - c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + aa'' = - c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2.(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

Sous leur seconde forme, elles deviennent

$$h'^2 = a'a'' - cc' = a'a'' - c'c'' + c'^2 ,$$
$$h''^2 = - b'b'' + aa' = - b'b'' + a'a'' + a'^2 ,$$
$$h'''^2 = - c'c'' + bb' = - c'c'' - b'b'' + b'^2 ,$$

d'où

$$(\beta) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(a'a'' - b'b'' - c'c'') .$$

De (α) et (β) résulte

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} . \qquad (4)$$

On aboutit donc dans les deux cas au même résultat.
Par suite:

Théorème IV. — *Dans un triangle* quelconque, *les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés correspondants sont égales.*

Cas particulier. — Triangle *rectangle.*
Si $\alpha = 90°$, on a: $b' = b$, $b'' = 0$; $c' = 0$, $c'' = c$.

La relation (4) devient

$$a'^2 + b^2 = a''^2 + c^2 ,$$

ou

$$b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2 , \qquad (5)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME V. — *Dans un triangle* RECTANGLE, *la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à la différence des carrés construits sur les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

En nous basant sur le *théorème de Pythagore généralisé*, nous pouvons démontrer le théorème II — d'où nous déduirons le théorème I — puis les théorèmes III et IV. Nous envisagerons le cas du triangle *acutangle*.

1° Pour le *théorème II* (fig. 2):

Appliqué au côté c, le théorème de Pythagore généralisé donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' .$$

Or

$$c^2 = h'^2 + a'^2 .$$

En remplaçant on a

$$h'^2 + a'^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$h'^2 = a^2 - a'^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

$$h'^2 = (a' + a'')a - a'^2 + b^2 - 2aa'' =$$

$$= a'(a - a') - aa'' + b^2 .$$

Mais

$$aa'' = bb' .$$

Par suite

$$h'^2 = a'a'' - bb' + b^2 = a'a'' + b(b - b') ,$$

$$\underline{h'^2 = a'a'' + bb''} (= a'a'' + cc')$$

C'est la relation du théorème II.