

# NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

Autor(en): **Krawtchouk, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20674>

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*

ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

# NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

M<sup>lle</sup> M. Byck dans sa note « Sur les déterminants dont les éléments sont des déterminants<sup>1</sup> » attire l'attention sur la relation:

$$\left| \begin{array}{|c|c|} \hline v_1 & w_1 \\ \hline x_1 & y_1 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|c|} \hline v_2 & w_2 \\ \hline x_1 & y_1 \\ \hline \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{|c|c|} \hline v_1 & w_1 \\ \hline x_2 & y_2 \\ \hline \end{array} \right| \cdots = \pm \left| \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & \cdots \\ \hline x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & \cdots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \hline 0 & 0 & v_2 & w_2 & \cdots \\ \hline v_1 & w_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline \end{array} \right|. \quad (1)$$

Parmi toutes ses généralisations<sup>2</sup> possibles nous notons ici seulement la suivante.

En décomposant le déterminant

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccccccc} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1, n_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2_{11} & \cdots & 2_{1, n_2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2, n_2+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1, n_p+1} & & & \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p, n_p+1} \\ 1_{11} & \cdots & 1_{1, n_1+1} & 2_{11} & \cdots & 2_{1, n_2+1} & p_{11} & \cdots & p_{1, n_p+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 1_{p,1} & \cdots & 1_{p, n_1+1} & 2_{p,1} & \cdots & 2_{p, n_2+1} & p_{p,1} & \cdots & p_{p, n_p+1} \end{array} \right| . (-1)^{(p-1)n_1 + (p-2)n_2 + \cdots + n_{p-1}} \quad (2)$$

<sup>1</sup> *L'Enseignement mathém.*, t. 24, 1924–25.

<sup>2</sup> Ici nous ne prenons pas les relations du type

$$\left| \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline c_1 & d_1 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & f_1 \\ \hline g_1 & h_1 \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 d_1 & b_1 c_1 & e_1 h_1 & f_1 g_1 \\ \hline a_2 d_2 & b_2 c_2 & e_2 h_2 & f_2 g_2 \\ \hline \end{array} \right| .$$

parce qu'elles ne sont qu'un cas particulier du type (1).

d'après les mineurs, constitués des colonnes renfermées entre deux traces verticales voisines, nous trouverons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1_{11} \dots 1_{1,n_1+1} & 2_{11} \dots 2_{1,n_2+1} & \dots & p_{11} \dots p_{1,n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{n_1 1} \dots 1_{n_1, n_1+1} & 2_{n_2 1} \dots 2_{n_2, n_2+1} & \dots & p_{n_p 1} \dots p_{n_p, n_p+1} \\ 1_{11} \dots 1_{1,n_1+1} & 2_{11} \dots 2_{1,n_2+1} & \dots & p_{11} \dots p_{1,n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{n_1 1} \dots 1_{n_1, n_1+1} & 2_{n_2 1} \dots 2_{n_2, n_2+1} & \dots & p_{n_p 1} \dots p_{n_p, n_p+1} \\ 1_{p1} \dots 1_{p, n_1+1} & 2_{p1} \dots 2_{p, n_2+1} & \dots & p_{p1} \dots p_{p, n_p+1} \end{vmatrix} \quad (3)$$

D'autre part, la décomposition du déterminant  $\Delta$  d'après les mineurs, constitués des lignes renfermées entre chaque deux traces horizontales voisines, donne

$$\Delta = \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_p+p(1+n_1+\dots+n_p)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_p}^{(p)} \cdot X_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad (4)$$

où

$$x_{i_\beta}^{(\alpha)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1, i_\beta-1}, \alpha_{1, i_\beta+1} \dots \alpha_{1, n_\beta+1} \\ \alpha_{21} \dots \alpha_{2, i_\beta+1}, \alpha_{2, i_\beta+1} \dots \alpha_{2, n_\beta+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_\beta 1} \dots \alpha_{n_\beta, i_\beta-1}, \alpha_{n_\beta, i_\beta+1} \dots \alpha_{n_\beta, n_\beta+1} \end{vmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p),$$

$$X_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} 1_{1i_1} 1_{2i_2} \dots 1_{pi_p} \\ 1_{2i_1} 1_{2i_2} \dots 1_{2i_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1_{pi_1} 1_{pi_2} \dots 1_{pi_p} \end{vmatrix} \quad (i_\gamma = 1, 2, \dots, n_\gamma).$$

L'égalité des expressions (3) et (4) est une généralisation du théorème connu de Sylvester; car, si nous faisons:

$$n_1 = n_2 = \dots = n_p = n,$$

$$l_{hi} = m_{hi} = x_{hi}; \quad l_{ji} = m_{ji} = x_{n+j,i};$$

$$l_{h,n+1} = x_{h,n+l}, \quad k_{j,n+1} = x_{n+j,n+k}$$

$$(h, i = 1, 2, \dots, n; \quad j, k, l, m = 1, 2, \dots, p; \quad k, l, m = 1, 2, \dots, p),$$

cette égalité prendra la forme:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{array} \right|, \quad \dots, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{array} \right|, \quad \dots, \quad \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{ccccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \dots & x_{1,n+p} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \dots & x_{2,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \dots & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \dots & x_{n+1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \dots & x_{n+p,n+p} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{c} x_{11} \dots x_{1n} \\ x_{21} \dots x_{2n} \\ \vdots \\ x_{n1} \dots x_{nn} \end{array} \right|^{p-1}
 \end{array}$$

---

## NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

---

**THÉORÈME I.** Soient  $B$  et  $\Gamma$  deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe  $\zeta$ ; soit de plus  $n$  le rapport de similitude de ces cercles,  $\alpha$  leurs centres de similitude et