NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

Autor(en): **Krawtchouk, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20675

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

cette égalité prendra la forme:

$$\left\|\begin{array}{c}
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{vmatrix} \\
\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\
\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & {}_{n} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{vmatrix}
\end{array}\right\|$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \cdots & x_{1,n+p} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{2,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \cdots & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \cdots & x_{n+1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \cdots & x_{n+p,n+p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}^{p-1}.$$

NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

THÉORÈME I. *Soient* B *et* Γ *deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe* ζ; *soit de plus* n *le rapport de similitude de ces cercles,* α *leurs centres de similitude et*

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ *quelques points en dehors de* Γ; *alors on a,*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\beta - \alpha_{n-1}} \neq 0 \,. \tag{1}$$

pour tout point β, *intérieur de* B.

Démonstration. Observons que la substitution $\zeta' = \frac{1}{\beta - \zeta}$, en

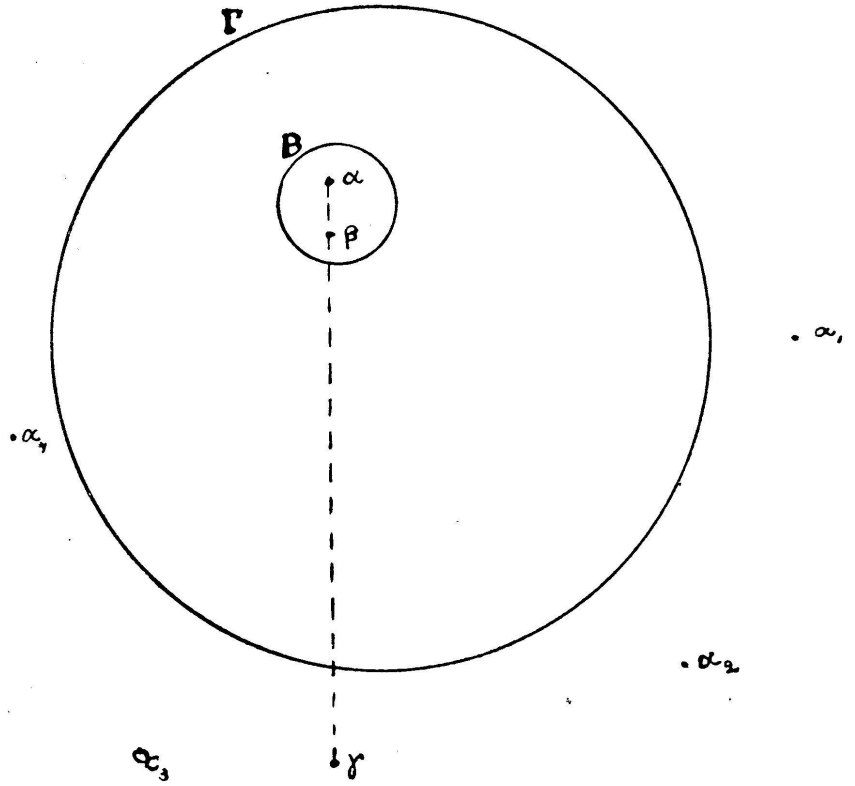

Fig. 1.

transformant Γ en un certain cercle C, remplace les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ par les points

$$a_i = \frac{1}{\beta - \alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

intérieurs de C. Alors le point

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$$

se trouve aussi à l'intérieur de c et par conséquent le point γ, déterminé par l'égalité $\alpha = \frac{1}{\beta - \gamma}$, est placé *en dehors* de Γ.

D'autre part l'inégalité (1) est équivalente à la suivante:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{n-1}{\beta - \gamma} \neq 0$$

ou bien à $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \neq n$. La condition contraire $\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = n\right)$ exigeant que le point γ soit *à l'intérieur* de Γ (en position semblable avec β), notre théorème est démontré. A titre d'application, posons maintenant:

$$(\beta - \alpha)(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2)(\beta - \alpha_3) \dots (\beta - \alpha_{n-1}) = f(\beta) ,$$

alors

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{\beta - \alpha_{n-1}} ,$$

d'où suit immédiatement le théorème bien connu:

THÉORÈME II. *Les racines du polynome* $f'(\zeta)$ *se trouvent à l'intérieur de chaque contour fermé convexe, contenant toutes les racines*

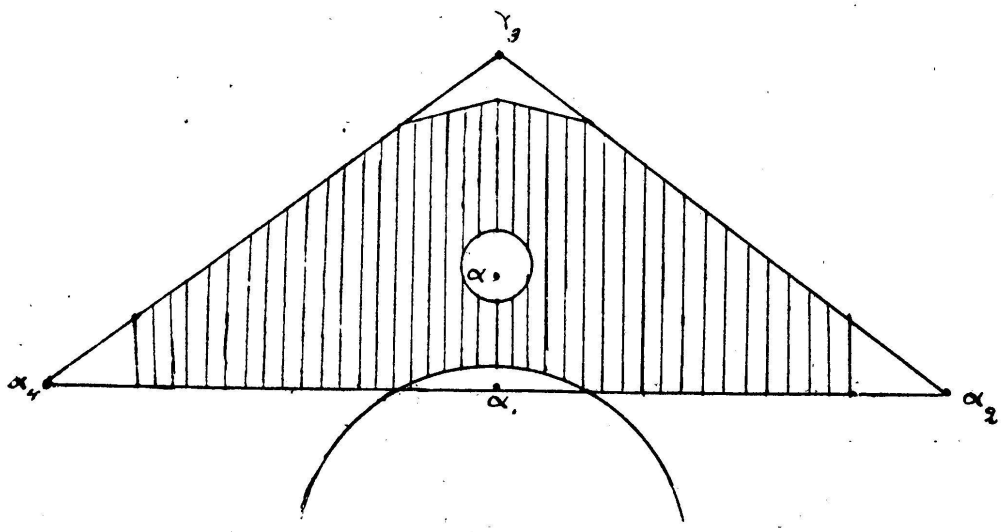

Fig. 2.

du polynome $f(\zeta)$. En ajoutant à ce théorème le théorème I, on peut encore restreindre davantage le domaine susdit des racines de $f'(\zeta)$ [1]. Par exemple, en remplaçant, dans des cas particuliers,

[1] Dans cet ordre d'idées il existe plusieurs travaux de M. WALSH; voir par ex. *C. R.*, Vol. 172, et *Comptes Rendus du Congrès intern. de math., Strasbourg*, 1920.

les cercles B et Γ par des lignes droites, on arrive à la conclusion que toutes les racines de la dérivée de

$$(\zeta - \alpha)(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2)(\zeta - \alpha_3)(\zeta - \alpha_4)$$

se trouvent placées dans la partie ombrée de la figure 2.

Diverses généralisations du *Théorème I* s'imposent immédiatement.

SUR LES CLASSES ($\mathfrak{L}$) DE M. FRÉCHET [1]

Note posthume de Paul URYSOHN,

rédigée par Paul ALEXANDROFF (Moscou).

---

1. — On entend par *une classe* ($\mathfrak{L}$) un ensemble abstrait, où certaines suites dénombrables d'éléments sont déclarées *convergentes*, sous la condition que les axiomes suivants se trouvent vérifiés :

1° *Une suite convergente converge vers un seul élément, dit limite de la suite convergente.*

2° *Si quel que soit n, $a_n = a$, on a toujours* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

3° *Toute suite partielle d'une suite convergente est, elle aussi, convergente : elle converge d'ailleurs vers l'élément limite de la suite entière.*

Les suites convergentes étant définies, un élément x de la classe ($\mathfrak{L}$) donnée s'appelle *élément d'accumulation* d'un ensemble M (situé dans cette classe), s'il existe au moins une suite

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad x_n \neq x \quad \text{(quel que soit } n\text{)} \qquad (1)$$

d'éléments de M, qui converge vers x.

Toutes les notions élémentaires de la théorie des ensembles s'introduisent alors comme d'habitude. En particulier, nous

---

[1] M. FRÉCHET, Thèse (*Rend. Palermo*, t. 22, 1906).