SUR LES CLASSES (£) DE M. FRÉCHET

Autor(en): **Urysohn, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20676

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

les cercles B et Γ par des lignes droites, on arrive à la conclusion que toutes les racines de la dérivée de

$$(\zeta - \alpha)(\zeta - \alpha_1)(\zeta - \alpha_2)(\zeta - \alpha_3)(\zeta - \alpha_4)$$

se trouvent placées dans la partie ombrée de la figure 2.

Diverses généralisations du *Théorème I* s'imposent immédiatement.

SUR LES CLASSES ($\mathfrak{L}$) DE M. FRÉCHET [1]

Note posthume de Paul URYSOHN,

rédigée par Paul ALEXANDROFF (Moscou).

---

1. — On entend par *une classe* ($\mathfrak{L}$) un ensemble abstrait, où certaines suites dénombrables d'éléments sont déclarées *convergentes*, sous la condition que les axiomes suivants se trouvent vérifiés :

1° *Une suite convergente converge vers un seul élément, dit limite de la suite convergente.*

2° *Si quel que soit n, $a_n = a$, on a toujours* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.

3° *Toute suite partielle d'une suite convergente est, elle aussi, convergente : elle converge d'ailleurs vers l'élément limite de la suite entière.*

Les suites convergentes étant définies, un élément x de la classe ($\mathfrak{L}$) donnée s'appelle *élément d'accumulation* d'un ensemble M (situé dans cette classe), s'il existe au moins une suite

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad x_n \neq x \quad \text{(quel que soit } n\text{)} \qquad (1)$$

d'éléments de M, qui converge vers x.

Toutes les notions élémentaires de la théorie des ensembles s'introduisent alors comme d'habitude. En particulier, nous

---

[1] M. FRÉCHET, Thèse (*Rend. Palermo*, t. 22, 1906).

désignerons comme *compact (dans la classe donnée)* tout ensemble M, dont chaque sous ensemble infini possède au moins un élément d'accumulation (appartenant ou non à M).

2. — Des exemples élémentaires montrent cependant que certains inconvénients logiques ne sont pas exclus par la définition précédente des classes ($\mathcal{L}$). Par exemple, deux suites

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

et

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

peuvent être convergentes et avoir le même élément-limite

$$z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

sans que la suite

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$$

soit nécessairement convergente.

Ces inconvénients provenant tous d'une même source [1], on peut les supprimer d'une façon radicale en introduisant un nouvel axiome [2]. Adoptons d'abord les définitions suivantes, dans le seul but de simplifier le langage:

(*a*) *Une suite*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

---

[1] Quand Paul URYSOHN s'occupait de la théorie des espaces ($\mathcal{L}$) (années 1922-1923), il ne connaissait pas le mémoire de M. FRÉCHET « Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits (*Bull. Sc. Math.*, t. 42, 1918) où, en particulier au parag. XIII, M. Fréchet signale lui-même les inconvénients dont il est question dans le présent travail.

M. FRÉCHET observait dans son mémoire cité que l'on peut définir la convergence des suites de plusieurs façons sans altérer l'opération fondamentale de la dérivation des ensembles. Se plaçant au point de vue que les espaces définis de cette façon sont identiques au point de vue topologique, il a indiqué une façon de supprimer les inconvénients signalés ci-dessus. Envisageant, ce qui est toujours possible, un espace ($\mathcal{L}$) comme une catégorie particulière des espaces ($\mathcal{Y}$), il propose d'admettre comme suite convergeant vers a non seulement celles définies comme telles, mais aussi toute suite d'éléments de l'espace ($\mathcal{L}$) donné qui est contenue dans tout voisinage de a à partir d'un certain rang (variable en général avec ce voisinage).

La solution d'URYSOHN est équivalente à celle donnée par M. FRÉCHET en 1918, mais elle ne fait pas usage de la notion de voisinage. Comme elle présente un certain intérêt propre (surtout au point de vue méthodologique) M. Fréchet, consulté, m'a vivement engagé à la publier. Paul ALEXANDROFF.

[2] Formulé, pour la première fois, dans la note « Une condition nécessaire et suffisante... (*Comptes Rendus*, t. 177, p. 1274; séance du 10 décembre 1923).

sera dite compacte si, quelle que soit la suite partielle,

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{2}$$

on en peut extraire une suite convergente

$$x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots, x_{n_{k_r}}, \ldots;$$

(donc, en particulier toute suite convergente est compacte).

(b) *L'élément-limite d'une sous-suite convergente quelconque d'une suite* (1) *s'appelle un élément contigu à la suite* (1).

Cela posé, nous pouvons formuler comme il suit notre axiome supplémentaire:

4° *Si une suite compacte*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

possède un seul élément contigu x, elle converge vers cet élément x.

Les classes ($\mathcal{L}$) vérifiant l'axiome 4° seront appelés *classes* ($\mathcal{L}$) *topologiques* ou simplement *classes* ($\mathcal{L}_t$).

3. — Revenons aux classes ($\mathcal{L}$) les plus générales. Nous dirons que deux classes ($\mathcal{L}$), soit E_1 et E_2, sont *concordantes, si elles sont formées d'un même ensemble d'éléments et si tout sous ensemble* M *possède, dans* E_1 *et* E_2, *les mêmes éléments d'accumulation.*

Remarque 1. Ce n'est que pour faciliter l'exposition que nous supposons que E_1 et E_2 soient formées des mêmes éléments: il suffirait, en effet, d'adopter une convention en apparence moins restrictive, à savoir qu'il existe, entre E_1 et E_2, une correspondance biunivoque conservant pour tout ensemble, les éléments d'accumulation. Or, *la nature des éléments formant une classe* ($\mathcal{L}$) *étant absolument indifférente* au point de vue logique, on n'obtiendrait par cette modification qu'une généralisation purement verbale de notre définition précédente.

Remarque 2. On démontre sans peine qu'*une suite* (1) *compacte dans* E, *l'est aussi dans toute classe concordante avec* E *(et y possède les mêmes éléments contigus).*

Deux classes E_1 et E_2 peuvent être concordantes sans être identiques, considérées comme classes ($\mathcal{L}$), c'est-à-dire sans

que les suites convergentes soient les mêmes dans les deux classes [1].

Soient en effet

$$z\,,$$

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n\,,\ \ldots$$

$$y_1\,,\ y_2\,,\ \ldots,\ y_n\,,\ \ldots$$

les éléments des deux classes E_1 et E_2. Quant à la définition de la convergence, posons:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = z \qquad \text{dans } E_1$$

et

$$\lim z_n = z \qquad \text{dans } E_2\,,$$

où on a désigné par z_{2m-1} l'élément x_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$ in inf), et par z_{2m} l'élément y_m.

Les deux classes E_1 et E_2 sont différentes (considérées comme classes ($\mathcal{L}$)), mais elles sont néanmoins concordantes.

4. — Soit E une classe ($\mathcal{L}$) quelconque. *Désignons par* $\tilde{E}$ *la classe* ($\mathcal{L}$) *obtenue en imposant aux éléments de* E *la définition de convergence suivante:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

toutes les fois que la suite

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_n\,,\ \ldots$$

est compacte dans E *et possède* x *pour son seul élément contigu.*

La classe $\tilde{E}$ (*univoquement déterminée par la connaissance de* E) est évidemment concordante avec E; $\tilde{E}$ *est en outre une classe* ($\mathcal{L}_t$).

On démontre enfin sans peine que, si E* était une classe ($\mathcal{L}$) concordante avec E, la classe $\tilde{E}$* correspondante est identique avec $\tilde{E}$.

---

[1] Tandis que *deux classes* ($\mathcal{L}_t$) *sont toujours identiques si elles sont concordantes* (car à toute suite convergente dans une des deux classes concordantes, il correspond dans l'autre une suite compacte possédant un seul élément contigu*; or, dans une classe ($\mathcal{L}_t$), une pareille suite est toujours convergente).

* Voir en effet la Remarque 2 (dans le texte ci-dessus).

On aboutit donc au résultat suivant:

Soit E *une classe* ($\mathfrak{L}$) *quelconque. Désignons par* $\mathfrak{S}_E$ *le système de toutes les classes* ($\mathfrak{L}$) *concordantes avec* E. *Le système* $\mathfrak{S}_E$ *contient une seule classe* ($\mathfrak{L}_t$), *à savoir* $\tilde{E}$, *qu'on obtient à partir d'une classe arbitraire appartenant à* $\mathfrak{S}_E$ *en y complétant la définition des suites convergentes de la façon indiquée au commencement du présent numéro.*

En d'autres termes:

Toute classe ($\mathfrak{L}$) détermine d'une façon univoque une classe ($\mathfrak{L}_t$) concordante.

5. — En désignant par $\overline{M}$ l'ensemble $M + M'$, les conditions suivantes se trouvent évidemment vérifiées dans toute classe ($\mathfrak{L}$):

I. Si M ne contient qu'un seul point, on a $\overline{M} = M$.

II. $\overline{M + N} = \overline{M} + \overline{N}$.

Rappelons maintenant que M. Fréchet appelle *classe* ($\mathfrak{S}$) toute classe ($\mathfrak{L}$) où l'ensemble dérivé M' est toujours fermé. Une classe ($\mathfrak{S}$) est donc une classe ($\mathfrak{L}$) satisfaisant à la condition supplémentaire:

5° $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

Nous appelons, en particulier, *classe* ($\mathfrak{S}_t$) toute classe ($\mathfrak{S}$) dans laquelle l'axiome 4° (donc *tous les axiomes* 1°-5°) se trouve vérifié.

6. — Revenons aux classes ($\mathfrak{S}$) générales. Il résulte de I, II et 5° que toute classe ($\mathfrak{S}$) est en même temps un espace accessible, c'est-à-dire que tous les éléments d'accumulation (pour un ensemble M quelconque, situé dans la classe donnée) peuvent être définis par l'intermédiaire de *voisinages* satisfaisant aux axiomes connus des espaces accessibles de M. Fréchet [1].

Il se comprend de soi même qu'on obtient, de cette façon, pour tout ensemble M les *mêmes* points *d'accumulation* que ceux qui résultaient de la définition de la classe ($\mathfrak{S}$) donnée. Mais il y a plus. La définition des voisinages conduit d'une façon naturelle à une *nouvelle* définition de la convergence (« *convergence a posteriori* »), définition que voici:

Une suite

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

[1] Il suffit, en effet, de considérer comme voisinage d'un point (= élément x de la classe donnée) un ensemble ouvert quelconque contenant ce point.

est dite convergente a posteriori *dans la classe* ($\mathcal{S}$) *donnée* E, *s'il existe un élément* x (« *point-limite* a posteriori *de la suite* (1) ») *tel que tout voisinage de* x *contient tous les éléments de* (1) *à l'exception possible d'un nombre fini d'entre eux.*

Démontrons qu'*une suite* (1) *est convergente* a posteriori *dans le cas et dans le cas seulement où elle est convergente dans la classe* $\tilde{E}$ *correspondante* (nº 4), c'est-à-dire si elle possède un seul élément contigu, en étant, en même temps compacte.

La démonstration consiste simplement dans la remarque que chacune des deux propriétés en question de la suite (1) (convergence *a posteriori* et convergence dans $\tilde{E}$ vers le même élément x) est équivalente à la suivante:

Quelle que soit la suite partielle

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{4}$$

de (1), *deux cas*, (a) et (b) *sont seulement possibles*:

(a) *tous les éléments de la suite partielle* (4) *coïncident, à partir d'un certain d'entre eux, avec le point* x;

(b) x *est un point d'accumulation de l'ensemble de points formant la suite partielle* (4).

Il en résulte en particulier, que, dans une classe ($\mathcal{S}$) quelconque, une suite convergente *a posteriori* ne possède qu'un seul point limite *a posteriori* (tandis que dans un espace accessible une suite convergente peut avoir en général plusieurs points limites (au sens de la définition « *a posteriori* », qui est évidemment valable dans un espace accessible quelconque).

Nous obtenons aussi la conséquence suivante de la proposition tout à l'heure mentionnée :

Dans une classe ($\mathcal{S}$) *la convergence donnée* a priori *coïncide avec celle qu'on définit* a posteriori *dans le cas et dans le cas seulement, où notre classe est une classe* ($\mathcal{S}_t$).

7. — En remarquant que tout espace accessible satisfait à la condition 5º, on tire des résultats précédents le théorème que voici:

Pour qu'une classe ($\mathcal{L}$) *soit un espace accessible, avec une convergence* a posteriori *identique à celle qui est* a priori *donnée dans notre classe* ($\mathcal{L}$), *il faut et il suffit que cette classe* ($\mathcal{L}$) *soit une classe* ($\mathcal{S}_t$).

D'autre part:

Pour qu'un espace accessible E *soit une classe* ($\mathfrak{L}$) [*qui est alors nécessairement* ($\mathfrak{S}_t$)] *l'ensemble des deux conditions suivantes est à la fois nécessaire et suffisant:*

(α) *toute suite convergente dans* E *possède un seul point limite*;

(β) *quel que soit le point d'accumulation* x *d'un ensemble quelconque* M *situé dans* E, *il existe une suite de points de* M *qui converge vers* x.

La démonstration de la dernière proposition ne présente aucune difficulté.

LA CONCEPTION ACTUELLE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES ET MÉROMORPHES

PAR

A. BLOCH (Paris).

L'objet de cet article est l'exposition de l'ensemble des idées principales que l'on est amené à avoir au sujet des fonctions entières et méromorphes d'une variable, à la suite des recherches contemporaines. La théorie de ces fonctions est supposée connue dans ses grandes lignes, telle en particulier qu'elle se trouve développée dans les travaux de MM. G. VALIRON, F. et R. NEVANLINNA et de l'auteur[1]. L'on trouvera surtout ici des considérations

[1] Cf. G. VALIRON. *a) Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse 1923); *b) Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* (Mémorial des Sciences Mathématiques, 1925).

R. NEVANLINNA. *a) Untersuchungen über den Picardschen Satz* (Acta Soc. Fennicae, t. 50, 1924); *b) Zur Theorie der meromorphen Funktionen* (Acta math., t. 46, 1925).

F. NEVANLINNA. *Ueber die Werteverteilung einer analytischen Funktion in der Umgebung einer isolierten wesentlich singulären Stelle* (Copenhague 1926).

A. BLOCH: *a)* C. R. de l'Acad. des Sc., t. 178, p. 1593; *b) Ibid.*, p. 2051; *c)* t. 179, p. 666; *d)* t. 181, p. 276; *e) Ibid.*, p. 1123; *f)* t. 182, p. 367; *g) Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation* (Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1925); *h) Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires* (Ann. de l'Ec. Norm., date de publication inconnue); *i) Sur les systèmes de fonctions uniformes liées par l'équation d'une variété algébrique, dont l'irrégularité dépasse la dimension* (Journal de Mathématiques, 1926); *j) Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité* (Mémorial des Sc. Math., 1926).