Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONCEPTION ACTUELLE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES ET MÉROMORPHES

Autor: Bloch, A.

Kapitel: II. L'algébrisation de la théorie des fonctions entières ET MÉROMORPHES.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20677

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tous les feuillets, sauf le dernier. Ainsi, notre principe s'applique encore.

9. Passons enfin à un troisième exemple: considérons une surface générique du quatrième degré $f_4(x, y, z) = 0$, et demandons-nous si elle est uniformisable par les fonctions méromorphes, c'est-à-dire s'il existe des fonctions méromorphes, non fonctions d'une seule d'entre elles, satisfaisant à son équation. Cette surface est identique topologiquement à la surface $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$, car l'une et l'autre sont sans singularités et l'on peut passer de manière continue de l'une à l'autre, sans avoir jamais de singularités.

On est donc ramené, en vertu du principe, à rechercher si la surface $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ est uniformisable par les fonctions méromorphes, et la réponse négative est vraisemblable; quoi qu'il en soit, la solution de cette question sera considérablement facilitée, si l'on commence par déterminer tous les systèmes de fonctions méromorphes d'une seule variable satisfaisant à cette dernière équation, c'est-à-dire si l'on résout l'équation $X + Y + Z - 1 = 0$ en fonctions méromorphes dont tous les zéros et tous les pôles sont d'ordre égal à 4 ou multiple de 4. Il est probable que les méthodes de MM. Valiron et Nevanlinna donneront la solution de cette dernière question (voir p. ex. R. Nevanlinna, *b*); il faudra naturellement appliquer ici la double dérivation. Observons que les ∞^1 sections de la surface $x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0$ par ses plans bitangents donnent ∞^1 courbes répondant à la question.

II. L'algébrisation de la théorie des fonctions entières et méromorphes.

10. La théorie des fonctions entières et méromorphes doit, pour se rapprocher de la perfection, prendre de plus en plus modèle sur l'algèbre. Certes, de nombreux obstacles sont encore à surmonter dans cette voie; cependant, l'on peut entrevoir dès à présent deux manières différentes de réaliser cette algébrisation de la théorie, seule susceptible de lui donner toute la précision qu'elle comporte. La première consistera dans l'étude des fonc-

tions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité, au moyen d'inégalités toutes absolument précises, combinées de manière à exclure la possibilité d'un jeu quelconque dans le mécanisme des déductions et donnant régulièrement par suite les résultats les plus complets. La seconde, basée sur l'étude approfondie des propriétés dans tout le plan des polynomes et fractions rationnelles de degré m, sera l'assimilation des fonctions entières et méromorphes à des polynomes et fractions rationnelles de degré infini.

11. L'étude systématiquement précise par des moyens élémentaires des fonctions holomorphes ou méromorphes dans le cercle-unité a été déjà réalisée pour des classes particulières de fonctions par exemple les fonctions bornées et les fonctions univalentes. Il ne semble pas douteux qu'elle soit possible dans tous les cas; considérons par exemple la théorie des fonctions à trois valeurs lacunaires, pour laquelle les résultats les plus complets ont été obtenus par M. Carathéodory, à l'aide de la fonction modulaire; les expressions relatives à cette dernière fonction peuvent être représentées par des séries appropriées fournies par la théorie des fonctions elliptiques (par exemple l'aire du parallélogramme des périodes en fonction du module); un raisonnement direct suffisamment habile permettra sans doute un jour d'obtenir sans recours à aucune fonction particulière les inégalités, obtenues aujourd'hui par la fonction modulaire, où figurent les séries à termes purement algébriques, dont il est question.

On peut trouver superflue l'édification de ce raisonnement direct, puisque la fonction modulaire suffit ici; mais il convient d'observer qu'un tel raisonnement pourra vraisemblablement être étendu à des questions auxquelles la fonction modulaire ne s'applique que malaisément, et même à d'autres pour l'étude desquelles on ne possèdera de longtemps aucun instrument comparable à la fonction modulaire.

12. Au sujet de l'obtention effective de ce raisonnement, ou plutôt des divers raisonnements directs que l'on sera probablement en mesure de construire un jour, et qui, comme l'emploi de la fonction modulaire, donneront les résultats les plus précis, seules quelques conjectures sont ici possibles. Par exemple, puisque le résultat final sera d'aspect algébrique, on pourra tenter

de l'obtenir par une méthode d'aspect algébrique; ainsi [A. BLOCH *f*) et *j*], nous avons indiqué des propositions relatives au système d'une infinité de relations:

$$a_0 b_0 = 1 \; ; \quad a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \; ; \; \ldots \; ; \; a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0 \; ; \; \ldots$$

Les questions ainsi posées paraissent intéresser également au premier chef, non seulement l'algèbre, mais encore la théorie des fonctions de variables réelles.

13. On pourrait aussi songer à donner toute la précision possible à la méthode de démonstration « élémentaire » des théorèmes de MM. Picard, Borel, Landau, Schottky, etc., méthode reposant sur la comparaison de la croissance des fonctions considérées et éventuellement aussi de leurs dérivées; dans cette méthode, on considère comme on sait des inégalités où figurent deux cercles concentriques distincts et l'on en déduit par un certain processus de sommation de nouvelles inégalités; l'obtention des résultats les plus complets serait assurément considérablement facilitée si l'on pouvait se débarrasser de ce processus en remplaçant les deux cercles successifs par un seul, et ce serait même là, semble-t-il, une condition indispensable du succès; or, nous allons voir qu'il est peu probable qu'on y puisse parvenir.

Puisqu'il s'agit de trouver des inégalités relatives à un seul cercle et puisque, d'autre part, la parfaite précision cherchée exige que seules soient employées des fonctions croissantes assez simples pour qu'il n'entre dans leur définition aucun arbitraire, la question revient en somme à la suivante: *Est-il possible de formuler par exemple le théorème de Picard-Borel, en n'employant que des fonctions croissantes simples, en sorte qu'il n'y ait pas à introduire d'intervalles exceptionnels dans l'énoncé du théorème* ?

Pour répondre à cette question, commençons par rappeler que MM. Valiron et Nevanlinna ont introduit respectivement, pour caractériser la densité des zéros d'une fonction holomorphe $f(x)$ et la croissance d'une telle fonction , certaines fonctions positives croissantes du module r de la variable x, désignées par $n(r, f)$, $\mathrm{N}(r, f)$ et par $m(r, f)$; pour une fonction méromorphe on a, outre

ces trois expressions (dont la dernière cesse d'être nécessairement croissante), la fonction positive croissante

$$m(r, f) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

désignée par $\mathrm{T}(r, f)$, ou par $gm(r, f)$.

Soit donné maintenant un certain nombre a distinct de $0, 1, \infty$; nous allons définir comme il suit une fonction $f_p(x)$, n'existant que dans un certain cercle centré à l'origine, où elle est holomorphe. Considérons la riemanienne (sphérique) de la fonction modulaire, et partageons-la en deux morceaux par une fente pratiquée sur un des feuillets le long du demi-grand-cercle des nombres réels négatifs. Considérons de même la riemanienne de la fonction exponentielle, formée d'une infinité de feuillets que nous considérons comme reliés les uns aux autres le long du même demi-grand-cercle et n'en conservons que la partie formée par p feuillets consécutifs. Intercalons enfin cette partie conservée entre les deux morceaux de la riemanienne modulaire: nous obtenons une riemanienne parfaitement déterminée évidemment représentable conformément sur un cercle. Pour réaliser effectivement cette représentation, nous faisons correspondre à l'origine centre du cercle, le point c du feuillet central de la riemanienne, si p est impair, d'un choisi une fois pour toutes des deux feuillets centraux, si p est pair (c est lui-même un nombre choisi une fois pour toutes, différent de $0, 1, \infty, a$). Nous achevons de définir la fonction $f_p(x)$ réalisant la représentation conforme en fixant sa dérivée d à l'origine.

$f_p(x)$ est alors une fonction définie et holomorphe dans un cercle de rayon r_p croissant indéfiniment avec p; pour toute valeur fixe de x, elle tend pour n infini vers l'exponentielle $ce^{\frac{d}{c}x}$. Or, l'expression $\mathrm{N}(r_p, f_p-1)$ est visiblement finie pour chaque valeur de l'entier p; au contraire, par un calcul approprié [R. Nevanlinna, *a*) p. 36], on trouve que l'expression $\mathrm{N}(r_p, f_p-a)$ est infinie. Donc, étant donnés les q premiers coefficients d'une fonction $f(x)$, holomorphe et sans zéros dans un cercle de rayon connu r et une borne supérieure de $\mathrm{N}(r, f-1)$, il est impossible d'en déduire une borne supérieure de $\mathrm{N}(r, f-a)$, et cela quelque grand que soit r.

Appliquant le principe « *Nil est in infinito...* », nous pouvons conclure avec certitude :

Il existe des fonctions entières sans zéros F(x) *telles que, pour un nombre* a *au moins,* $\frac{N(r, F-a)}{N(r, F-1)}$ *ne tende pas vers un sans intervalles exceptionnels pour* r *infini.*

C'est là un fait digne d'attention ; que $m(r, F)$ et $gm(r, F)$ ne donnassent pas avec l'expression $N(r, F)$ ou une somme de telles expressions des inégalités sans intervalles exceptionnels, cela pouvait ne pas surprendre, puisque $\log|F|$ n'est défini que par la distinction, de caractère peu algébrique, entre les valeurs de $|F|$ supérieures et inférieures à l'unité ; mais $N(r, F)$ étant, au moins pour une fonction holomorphe, défini de manière purement algébrique par le théorème de M. Jensen, il n'était pas déraisonnable d'espérer que les inégalités où figurerait seulement ce symbole, auraient lieu sans intervalles exceptionnels. On voit qu'il n'en est rien ; $\frac{N(r, F-a)}{N(r, F-1)}$ qui, pour une fonction entière sans zéros, tend vers un d'après M. Nevanlinna, sauf éventuellement dans certains intervalles exceptionnels, peut effectivement ne le faire qu'à l'exclusion de tels intervalles.

Or, les seules fonctions croissantes simples des modules des racines inférieures à r sont $n(r, f)$ et $N(r, f)$. Laissant de côté pour l'instant la question de savoir si pour une fonction entière F sans zéros, $\frac{n(r, F-a)}{n(r, F-1)}$ tend vers un, avec éventuellement certains intervalles exceptionnels, observons tout au moins que si la chose a lieu, le raisonnement précédent prouve, pour n comme pour N, la nécessité des intervalles exceptionnels. En tout cas, le fait qu'une fonction aussi simple et aussi naturellement définie que N, qui donne une limite du rapport égale à un, avec peut-être certains intervalles exceptionnels, exige effectivement l'introduction de tels intervalles, permet bien de répondre par la négative à la question posée. Assurément, en considérant au lieu de $N(r, F)$ la valeur moyenne entre 0 et r du produit de $N(r,F)$ par une certaine fonction de r — c'est ce que M. R. Nevanlinna fait quelquefois dans un objet différent — l'on pourra bien avoir un rapport tendant vers un sans intervalles exceptionnels ; mais il est certain que la fonction ainsi introduite, dans la définition de laquelle entrera d'ailleurs une large part d'arbitraire, ne donnera qu'une

précision limitée en ce qui concerne la distribution des racines et sera donc inadéquate à l'obtention des résultats les plus complets.

En définitive, les méthodes élémentaires habituelles de démonstration du théorème de Picard-Landau ne semblent pas — à moins de profondes transformations — permettre d'édifier une théorie absolument précise; cela accroît encore l'intérêt de la méthode des coefficients, dont le principe a été indiqué au n° 12, méthode que, d'ailleurs, de toutes manières, l'on sera nécessairement conduit à développer un jour.

14. Pour caractériser la croissance d'une fonction méromorphe, on peut considérer, au lieu de l'expression $gm(r, f,)$ une fonction croissante différente; tandis que $gm(r,f)$ est liée par des relations d'inégalité simples à $N(r, f)$, cette nouvelle fonction $S(r, f)$ paraît plutôt liée simplement à $n(r,f)$. La fonction méromorphe $f(x)$ étant représentée par un point d'une sphère sur laquelle 0 et ∞ sont diamétralement opposés, $S(r,f)$ est définie comme le quotient par l'aire de la sphère de l'aire du domaine riemannien correspondant sur cette sphère aux valeurs de la fonction dans le cercle $|x| < r$.

On sait que l'aire d'un domaine riemannien plan joue un grand rôle dans la théorie des intégrales abéliennes; elle n'est pas moins importante pour la représentation conforme; car le minimum de cette aire pour une fonction holomorphe dans un domaine donné en un point duquel sa valeur est fixée, ainsi que celle de sa dérivée, est fourni par la représentation conforme du domaine sur un cercle (il y aurait intérêt à étendre ceci au cas de p fonctions de p variables). L'aire $S(r,f)$, à la convexité près par rapport à $\log r$, jouit de propriétés analogues; elle est comme elle représentable par une intégrale double, par une intégrale simple et de même que la première est égale pour $r = 1$ à la somme des carrés des modules des coefficients de la série entière, $S(r,f)$ s'exprime simplement par les coefficients des deux séries entières dont le quotient est la fonction méromorphe considérée.

On a probablement, pour r infini, à des intervalles exceptionnels près:

$$S(r, f) > (1 - \varepsilon)\, n(r, f) \;;$$

$$S(r, f) < (1 + \varepsilon)\,[n(r, f - a) + n(r, f - b) + n(r, f - c)] \,.$$

Il est également vraisemblable que si pour des fonctions méromorphes dans un domaine, l'aire du domaine riemannien est inférieure à p fois l'aire de la sphère, les fonctions engendrent une famille quasi-normale de M. Montel [1] d'ordre p au plus.

Si les égalités qui viennent d'être écrites sont exactes, il en résultera que *pour une fonction entière sans zéros,* $\frac{n(r, F-a)}{n(r, F-1)}$ *tend vers un pour* r *infini, à des intervalles exceptionnels près* (qui sont nécessaires, comme on l'a vu plus haut).

La quantité $S(r,f)$, en raison de la simplicité de sa définition, est peut-être appelée à jouer un certain rôle dans le développement ultérieur de la théorie.

15. Le théorème sur le cercle (à un feuillet) de centre réel du n° 5 a pour corollaire la proposition suivante:

Soit $F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$ *une fonction entière sans zéros. Au terme constant* a_0 *l'on peut associer une fonction positive* $\varphi(a_0)$ *de ce terme constant jouissant de la propriété suivante: si petit que soit* ε *positif, l'on peut trouver un nombre* K *ne dépendant que de* a_0 *et* ε, *tel que pour* $r > K$, *l'on ait:*

$$\frac{n(r, F-1)}{r} > (1-\varepsilon)\,|a_1|\,\varphi(a_0) \ .$$

Dès lors, la question qui se pose est la suivante: *Peut-on prendre pour* $\varphi(a_0)$ *l'expression fournie par l'exponentielle* $a_0 e^{\frac{a_1}{a_0}x}$, *c'est-à-dire* $\frac{1}{\pi\,|a_0|}$?

Il est possible d'y répondre affirmativement, par un raisonnement finitiste approprié, en utilisant un théorème établi par M. Valiron comme conséquence de sa théorie générale:

$F(x)$ *étant une fonction entière sans zéros, d'ordre supérieur ou égal à un,* $\frac{n(r, F-1)}{r}$ *tend vers l'infini avec* r.

De même:

Soient: $x = f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots$, $y = g(t) = b_0 + b_1 t + \ldots$ *deux fonctions méromorphes liées par la relation de genre un:* $y^2 = (1-x^2)(1-c^2x^2)$; *il existe* $\psi(c)$ *et,* ε *positif étant donné,*

---

[1] Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques (*Bull. de la Soc. math.* t. LII, 1924, p. 85).

K *ne dépendant que de* c, a_0, b_0, a, ε, *et d'un point* I *fixé arbitrairement sur la courbe, tels que, pour* $r > K$, *l'on ait,* $n(r; f, g)$ *étant le nombre de fois que le point* I *est atteint dans le cercle de rayon* r :

$$\frac{n(r\,;\,f,\,g)}{r^2} > (1-\varepsilon)\left|\frac{a_1}{b_0}\right|^2 \psi(c)\ .$$

L'expression exacte de $\psi(c)$ est celle fournie par l'uniformisation de la courbe à l'aide de l'intégrale de première espèce, c'est-à-dire $\frac{\pi}{Q}$, où Q est l'aire du parallélogramme des périodes de cette intégrale $\int \frac{dx}{y}$.

16. Observons que les deux expressions envisagées plus haut pour caractériser la croissance d'une fonction méromorphe $gm(r, f)$ et $S(r, f)$, sont de nature assez différente: la première mesure la rapidité avec laquelle la fonction s'approche en moyenne d'une valeur déterminée, d'ailleurs quelconque du plan; la seconde peut être regardée comme le degré d'une fraction rationnelle voisine de la fonction dans le cercle de rayon r. A ce second point de vue, l'on peut envisager encore d'autres expressions; par exemple, la valence de la fonction dans le cercle, c'est-à-dire le nombre maximum de fois qu'elle y repasse par la même valeur; ou encore le degré minimum d'une fraction rationnelle dont la surface de Riemann comprenne le domaine riemannien engendré par la fonction dans le cercle.

On peut aussi combiner les deux points de vue. Soit, par exemple, un cercle fixe quelconque de la sphère où est représentée la fonction; on peut prendre, pour caractériser la croissance, le degré minimum d'une fraction rationnelle dont la surface de Riemann porte simultanément, sans empiètement, tous les morceaux compris à l'intérieur de ce cercle du domaine riemannien engendré dans le cercle de rayon r. Si l'on change de place le cercle de la sphère, ce qui revient à effectuer sur la fonction une substitution linéaire, on aura généralement un nombre différent du premier. Lorsque r croît indéfiniment, il est vraisemblable que le rapport des deux nombres tend vers un, à certains intervalles exceptionnels près; ces intervalles exceptionnels sont nécessaires, comme on le reconnaît en représentant conformément le cercle de rayon r sur un certain domaine riemannien peu différent

d'un système de feuillets successifs de la riemanienne exponentielle et appliquant le principe: « *Nil est in infinito...* »

Ce dernier exemple prouve également sans peine que si, comme il est probable, le rapport de $S\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right)$ à $S(r, f)$ tend vers un, pour r infini, à certains intervalles exceptionnels près, ceux-ci sont du moins indispensables. Il est clair que ce rapport est compris, quel que soit r, entre deux limites finies et non nulles ne dépendant que de a, b, c, d; mais cela est sans intérêt.

17. Passons à la considération de la seconde méthode d'algébrisation de la théorie des fonctions entières et méromorphes, celle basée sur leur assimilation à des polynomes et à des fractions rationnelles de degré infini.

Le concept de la surface de Riemann (ici de genre zéro) sera particulièrement commode dans une méthode de ce genre; or, ce qui fait toute l'importance de ce concept, c'est surtout le théorème d'existence de Riemann, d'après lequel à toute surface connexe à m feuillets plans ou sphériques reliés par des lignes de croisement correspond une relation algébrique. Ce théorème est cependant demeuré longtemps mystérieux; jusqu'à ces dernières années, on ne savait le démontrer qu'à l'aide de la théorie du potentiel; à une date assez récente, M. Severi a pu l'établir par des considérations purement algébrico-géométriques: mais bien que marquant un progrès essentiel, cette solution conserve encore un caractère provisoire.

En réalité, ainsi que le laissait prévoir le théorème de Clebsch-Lüroth, la difficulté est à peu près la même, qu'il s'agisse d'une surface de genre supérieur à zéro ou simplement d'une surface de genre zéro; or, dans ce dernier cas, la question relève évidemment de la pure algèbre; on ne change même rien au fond des choses en supposant qu'au lieu de la surface de Riemann d'une fraction rationnelle, il s'agisse plus simplement encore de celle d'un polynome, c'est-à-dire d'un système connexe de m feuillets plans avec seulement $m-1$ points de ramification à distance finie. La méthode à employer pour une surface de Riemann quelconque peut être conçue comme il suit: en supprimant un feuillet de la surface, on en obtient une à un feuillet de moins; il s'agit donc, le problème d'existence étant résolu pour une surface, de le résoudre pour la surface obtenue en lui ajoutant un feuillet, que

l'on peut supposer relié à la première par une seule ligne de croisement. Ce procédé s'applique de manière particulièrement simple au cas de la surface de Riemann d'un polynome; voyons, en effet, comment, le problème étant résolu pour une surface à m—1 feuillets, on peut, par adjonction d'un feuillet, le résoudre pour une surface à m feuillets: connaissant l'affixe du $(m-1)^{\text{ème}}$ point de ramification, on détermine, par la résolution d'une équation de degré m—1, celui des m—1 feuillets sur lequel il se trouve; ce feuillet déterminé, il y aura encore un certain nombre d_m de manières essentiellement distinctes de tracer la ligne de croisement allant à l'infini, dont la connaissance déterminera la surface à m feuillets; donc, connaissant le polynome répondant à la surface à m—1 feuillets, celui répondant à la surface à m feuillets sera déterminé par la résolution de deux équations successives de degrés m—1 et d_m. Ce procédé, suffisant pour établir le théorème d'existence, devra encore être perfectionné pour conduire à la détermination la plus simple d'un polynome de degré m, connaissant les valeurs qu'il prend aux zéros de sa dérivée, car il est possible que des simplifications se produisent. Le procédé d'adjonction successive s'applique de même à toute surface de genre zéro et à toute surface de genre quelconque; après l'avoir développé, comme il le mérite en lui-même, il conviendra de voir s'il ne peut être abrégé.

En tout cas, le théorème d'existence de Riemann, au moins dans le cas d'un polynome ou d'une fraction rationnelle, apparaît bien désormais comme appartenant au domaine de l'algèbre, qu'il est probablement appelé à rénover; on peut prévoir que sa théorie, combinée à la théorie de Galois, ouvrira des vues nouvelles sur plusieurs questions. Etendu aux fonctions entières et méromorphes, il sera très utile dans le sujet dont nous allons parler.

18. Remarquons d'abord que si l'on découpe (comme avec un emporte-pièce) la riemanienne d'une fonction entière ou méromorphe, le long d'un contour simple donné qui peut être un cercle, l'on peut obtenir dans certains cas, même si la fonction est transcendante, des morceaux connexes formés d'un nombre fini n de feuillets; s'il s'agit d'une fonction entière, chaque feuillet se ramifie une fois avec le suivant et il y a n—1 points de ramification (supposés ordinaires); s'il s'agit d'une fonction méro-

morphe, chaque feuillet se ramifie une ou deux fois avec le suivant et il y a au moins $n-1$ et au plus $2n-2$ points de ramification.

Soit $f(x)$ une fraction rationnelle de degré m; supposons que l'équation $f(x)=X$ ait exactement p racines distinctes: $\frac{m-p}{m-1}$ est alors dit l'indice de multiplicité de X par rapport à la fraction; *la somme des indices de multiplicité de tous les points de la sphère est égale à deux.* Pour un polynome, la somme des indices de multiplicité de tous les points du plan est égale à *un.* L'indice de multiplicité d'une région limitée par une ou plusieurs courbes simples est défini comme la somme des indices de ses différents points; c'est le quotient par $m-1$ du nombre de points de ramification (simples) qu'elle contient.

Une question se pose alors: pour une fonction transcendante entière ou méromorphe, est-il possible de définir de même l'indice de multiplicité d'un point ou d'une région, en sorte que la somme des indices des différents points du plan ou de la sphère, ou des différentes régions en lesquelles on les suppose partagés, soit encore égale à un ou deux ? Certes, il y a des cas où la chose ne présente pas de difficulté; par exemple, si nous considérons une fonction transcendante entière telle qu'en en découpant la riemanienne le long d'un certain cercle, l'on ne rencontre pas de point critique et que l'on obtienne ainsi une infinité de morceaux connexes composés tous d'exactement q feuillets circulaires, l'indice sera, puisque m est infini, $\frac{q-1}{q}$. Mais si l'on suppose que tous les morceaux obtenus soient composés par exemple d'un ou deux feuillets, on peut dire encore, sans encourir de contradiction, que l'indice est au plus égal à $\frac{1}{2}$; si l'on veut définir sa valeur précise, ce sera par une convention qui, comme nous le dirons plus loin, pourra varier dans chaque cas.

19. Pour avoir une vue plus nette du sujet actuel, fixons notre attention sur une catégorie particulière de fonctions entières les fonctions $G_n(x)$; voici comment elles sont définies: une fonction $G_n(x)$ est une fonction dont l'inverse, donnée par la résolution de l'équation $G_n(x) = X$ est uniforme partout à distance finie, sauf en n points $X_1, X_2 \ldots X_n$, où elle peut avoir, soit une, soit deux déterminations. Les fonctions G_0 sont les polynomes du premier degré, les fonctions G_1 ceux du second degré; les

fonctions G_2 sont des polynomes de tous les degrés, se divisant en deux catégories, suivant la parité du degré (et qu'il y aurait lieu de former explicitement), la fonction $\cos\sqrt{x}$, d'ordre $\frac{1}{2}$ et la fonction $\cos x$, d'ordre un.

Les fonctions G_3, à l'étude desquelles on peut borner celle des G_n, comprennent d'une part des polynomes, d'autre part, des fonctions entières, dont il y aurait lieu d'établir la classification; on peut, d'ailleurs, supposer pour fixer les idées X_1, X_2 et X_3 réels. Il existe parmi les G_3 des fonctions dont la croissance dépasse celle de toute fonction donnée à l'avance. Si, pour X_1 et X_2, toutes les branches de l'inverse ont deux déterminations, il s'agit du cosinus d'une fonction entière, d'ailleurs particularisée; par exemple, $\cos(ax^2 + bx + c)$.

Voyons s'il est possible de définir d'une manière générale pour une fonction G_3 l'indice d'un des trois points, X_1 par exemple. Supposons que pour $|x| < R$, l'équation $G_3(x) = X_1$ ait α_1 racines simples et β_1 racines doubles; le quotient $\frac{\beta_1}{\alpha_1 + 2\beta_1 - 1}$ sera dit alors l'indice de X_1 à l'intérieur du cercle $|x| = R$. Il est naturel de définir comme indice de X_1 dans tout le plan la limite pour R infini de l'indice à l'intérieur du cercle de rayon R, à la condition que cette limite existe; mais on peut construire des fonctions G_3 pour lesquelles cette limite n'existe pas; et quelque définition que l'on donne de l'indice, telle bien entendu que la somme des indices de X_1, X_2, X_3 soit égale à un, il existera toujours des G_3 pour lesquels cette définition n'aura pas de sens.

20. Or, pour les fonctions entières quelconques, particulièrement intéressantes sont les valeurs d'indice un, c'est-à-dire en somme les valeurs exceptionnelles B (Borel); on est alors, d'une manière analogue, conduit au fait suivant:

Il est impossible de trouver une définition des valeurs exceptionnelles B *présentant un caractère définitif: quelque définition que l'on en donne, il existera toujours des fonctions n'en possédant pas avec cette définition, mais en possédant au contraire avec une nouvelle définition, comprenant la précédente, mais plus générale* (telle bien entendu comme la précédente qu'une fonction entière ait au plus une, une fonction méromorphe au plus deux valeurs exceptionnelles B).

Ce fait ayant lieu pour les valeurs exceptionnelles B a lieu nécessairement aussi pour les valeurs exceptionnelles d'un type plus général dites valeurs exceptionnelles N [R. NEVANLINNA *b*), p. 97] et qui peuvent être en infinité dénombrable; il est d'ailleurs assez curieux que leur théorie présente un certain parallélisme avec celle de la multiplicité des zéros.

21. Pour une fonction G_3, nous avons dit qu'il est impossible de définir d'une manière générale l'indice de X_1 par le comportement pour R infini de $\frac{\beta_1}{\alpha_1 + 2\beta_1 - 1}$; mais on a peut-être la proposition suivante:

Pour une fonction G_3, *la somme*

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1 + 2\beta_1 - 1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2 + 2\beta_2 - 1} + \frac{\beta_3}{\alpha_3 + 2\beta_3 - 1}$$

des indices de X_1, X_2, X_3 *à l'intérieur du cercle* $|r| = R$ *a une limite inférieure d'indétermination égale à un lorsque* R *croit indéfiniment.*

De même, on a probablement:

Pour une fonction entière quelconque, la somme des indices de points fixes X_1, X_2 ... X_n *à l'intérieur du cercle* $|x| = R$ *a une limite inférieure d'indétermination au plus égale à un lorsque* R *croît indéfiniment.*

Ces propositions s'établiront vraisemblablement comme conséquence de la théorie de la fonction S (r,f), signalée au n° 14; mais nous ne voulons pas y insister.

Plus importante est la question suivante, dont la résolution permettra d'approfondir les véritables analogies entre les fonctions entières ou méromorphes et les polynômes ou les fractions rationnelles et conduira à une nouvelle et féconde démonstration du théorème de Picard-Landau; la façon particulièrement simple dont elle se pose, montre à quel point la considération des fonctions G_3 est opportune:

Etant donnés trois points X_1, X_2, X_3 *du plan complexe, il existe une infinité de riemanniennes simplement connexes ne se ramifiant pas ailleurs qu'en ces trois points, ces points de ramification étant d'ailleurs simples. A quelle condition une telle riemannienne est-elle celle d'une fonction transcendante entière* G_3 ?

La relation numérique cherchée, ne relevant que de la géométrie de situation, sera sans doute fournie par la considération d'un réseau infini de polygones.

22. Citons enfin, dans un ordre d'idées voisin, une proposition dont il conviendrait de vérifier l'exactitude:

Soit $F(x)$ *une fonction entière; supposons qu'au voisinage d'un point* X_0, *c'est-à-dire à l'intérieur d'un certain cercle de centre* X_0, *toutes les branches de la fonction inverse admettent au plus un certain nombre fini de déterminations. Considérons alors les racines de l'équation* $F(x) = X_0$, *situées à l'intérieur du cercle* $|x| = R$: *la somme des inverses de ces racines, des carrés de leurs inverses, etc. ont, lorsque* R *croît indéfiniment, des limites dont les différences pour deux valeurs voisines de* X_0 *se calculent en fonction des premiers coefficients du développement de* $F(x)$, *exactement comme si* $F(x)$ *était un polynome.*

Cette proposition est à rapprocher de la suivante, due à M. Collingwood:

Les mêmes hypothèses étant faites sur le comportement de l'inverse au voisinage de X_0, *l'on a*

$$\lim_{R=\infty} \frac{N(R, F - X_0)}{gm(R, F)} = 1 .$$

On pourra peut-être, dans le même ordre d'idées, établir la proposition que voici:

$P(x)$ *étant un polynome, la somme des inverses des racines de l'équation:*

$$e^{P(x)} = c_0 + c_1 x + \ldots = a ,$$

situées à l'intérieur du cercle $|x| = R$, *est égale à* $\frac{(a + c_0) c_1}{2(a - c_0) c_0} + \varepsilon$, *où* ε *est une quantité qui,* c_0 *et* c_1 *étant connus, tend uniformément vers zéro avec* $\frac{1}{R}$, *quels que soient les coefficients suivants du polynome, quel que soit son degré.*

L'énoncé suivant est peu différent:

La somme des inverses des puissances $m^{\text{ièmes}}$ *des racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le sinus d'une fonction entière, comprises à l'intérieur d'un cercle centré à l'origine, tend lorsque le rayon du cercle croît indéfiniment, vers une limite qui se calcule*

par les formules de Newton exactement comme si le sinus était un polynome.

23. Une conclusion à tirer du précédent article est la suivante: *la théorie des fonctions entières et méromorphes n'est en somme pas autre chose que la théorie quantitative des polynomes et des fractions rationnelles, abstraction faite de leur degré.* Ce point de vue n'a évidemment qu'un lointain rapport avec d'autres, comme celui d'après lequel « les comparaisons et le langage de la biologie » seraient « très utiles en théorie des fonctions »[1]. Mais si le point de vue actuel comporte plus que celui-là des difficultés ardues et périlleuses et exige assurément plus d'efforts, il n'est pas douteux par contre qu'il conduira en définitive à de tout autres résultats.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE GAUSS DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

---

1. La loi de GAUSS, que quelques auteurs appellent aussi le théorême de BERNOULLI-LAPLACE, s'exprime par la relation arithmétique suivante:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\mathrm{E}(np)-s)!\,(n-\mathrm{E}(np)+s)!} p^{\mathrm{E}(np)-s} q^{n-\mathrm{E}(np)+s} \sqrt{4pqn}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\lambda^2}, \tag{1}$$

où $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $s = \mathrm{E}(\lambda\sqrt{2pqn})$, λ étant un nombre constant, choisi à volonté. $\mathrm{E}(x)$ désigne le plus grand entier

[1] E. BOREL, *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions.* 1922.