DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE GAUSS DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

Autor(en): **Lomnicki, Antoine**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20678

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

par les formules de Newton exactement comme si le sinus était un polynome.

23. Une conclusion à tirer du précédent article est la suivante: *la théorie des fonctions entières et méromorphes n'est en somme pas autre chose que la théorie quantitative des polynomes et des fractions rationnelles, abstraction faite de leur degré.* Ce point de vue n'a évidemment qu'un lointain rapport avec d'autres, comme celui d'après lequel « les comparaisons et le langage de la biologie » seraient « très utiles en théorie des fonctions »[1]. Mais si le point de vue actuel comporte plus que celui-là des difficultés ardues et périlleuses et exige assurément plus d'efforts, il n'est pas douteux par contre qu'il conduira en définitive à de tout autres résultats.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE GAUSS DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

---

1. La loi de GAUSS, que quelques auteurs appellent aussi le théorême de BERNOULLI-LAPLACE, s'exprime par la relation arithmétique suivante:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\mathrm{E}(np)-s)!\,(n-\mathrm{E}(np)+s)!} p^{\mathrm{E}(np)-s} q^{n-\mathrm{E}(np)+s} \sqrt{4pqn}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\lambda^2}, \tag{1}$$

où $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $s = \mathrm{E}(\lambda\sqrt{2pqn})$, λ étant un nombre constant, choisi à volonté. $\mathrm{E}(x)$ désigne le plus grand entier

[1] E. BOREL, *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions.* 1922.

contenu dans x. Le symbole $(E(np)-s)!$ n'a de sens que pour n suffisamment grand, savoir pour $E(np)>s$. Si np parcourt seulement les valeurs entières, la formule (1) prend une forme plus simple:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{np-s}p^{np-s}q^{nq+s}\sqrt{4pqn}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\lambda^2}\,, \tag{2}$$

Comme dans cette formule figurent le nombre π et la fonction exponentielle, il faudra dans la démonstration faire usage d'une définition arithmétique du nombre π et d'une définition de e^x. Nous adopterons la définition de π par la formule de Wallis, laquelle se montre ici la plus naturelle et la plus convenable et nous définirons e^x par $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Nous ne ferons pas usage de la formule de Stirling, au contraire, elle découlera presque immédiatement de nos raisonnements. Voilà pourquoi nous appelons notre démonstration « démonstration élémentaire ».

La formule classique de Wallis s'écrit:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2.2.4.4\ldots(2m-2)2m}{1.3.3.5\ldots(2m-1)(2m-1)}=\frac{\pi}{2}\,.$$

On la transforme sans peine en

$$\lim_{m\to\infty}W_{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m\,!}{m\,!^2}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \tag{3}$$

Appelons $A_n(s)$ le terme général de la suite, qui figure dans la formule (1) ou (2).

2. La démonstration de la loi de Gauss devient très simple dans le cas *symétrique* $p=q=\frac{1}{2}$. La suite considérée devient

$$A_n(s)=\frac{n\,!}{\left(E\left(\frac{n}{2}\right)-s\right)!\left(n-E\left(\frac{n}{2}\right)+s\right)!}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n}\,. \tag{4}$$

Il suffit de chercher la limite de cette suite pour $n=2\,m$, car

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A_{2m+1}(s)}{A_{2m}(s)}=1\,,$$

comme il est aisé de voir. Nous avons donc

$$A_n(s) = A_{2m}(s) = \frac{2m!}{(m-s)!\,(m+s)!}\,\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}. \tag{5}$$

Pour $s = 0$ on a

$$A_n(0) = \frac{2m!}{m!^2}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}} = W_{2m},$$

donc

$$\underline{\lim_{n\to\infty} A_n(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}}. \tag{6}$$

Pour $s \neq 0$ nous séparons le terme qui tend vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, alors

$$A_n(s) = A_n(0)\,.\,B_n(s)$$

$$= \frac{2m!\,\sqrt{2m}}{m!^2\,2^{2m}}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-s+2)(m-s+1)}{(m+s)(m+s-1)(m+s-2)\ldots(m+2)(m+1)}. \tag{7}$$

Pour déterminer la limite de $B_n(s)$, considérons

$$\frac{1}{B_n(s)} = \frac{1}{B_{2m}(s)}$$

$$= \left(1+\frac{s}{m}\right)\left(1+\frac{s}{m-1}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{m-s+2}\right)\left(1+\frac{s}{m-s+1}\right).$$

Ce produit contient s facteurs, qui vont en croissant, donc

$$\left(1+\frac{s}{m}\right)^s < \frac{1}{B_{2m}(s)} < \left(1+\frac{s}{m-s+1}\right)^s. \tag{8}$$

Pour $s = \text{const.}$ nous aurions $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(s) = 1$, mais pour $s = E(\lambda\sqrt{2pqn})$, c'est-à-dire pour

$$s = E\left(\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = E(\lambda\sqrt{m}),$$

nous obtiendrons une limite qui dépend du λ. Supposons d'abord $\lambda\sqrt{m}$ entier. Dans ce cas

$$\left(1+\frac{s}{m}\right)^s = \left(1+\frac{\lambda\sqrt{m}}{m}\right)^{\lambda\sqrt{m}} = \left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}\,.\,\lambda},$$

alors

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{s}{m}\right)^s = e^{\lambda^2}.$$

De même

$$\left(1 + \frac{s}{m - s + 1}\right)^s = \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{m} - \lambda + \frac{1}{\sqrt{m}}}\right)^{\lambda\sqrt{m}}$$

tend vers e^{λ^2}.

Les inégalités (8) fournissent alors

$$\lim_{n\to\infty} B_n(s) = e^{-\lambda^2} . \tag{9}$$

Les formules (6), (7) et (9) donnent

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\lambda^2} . \tag{10}$$

Si $\lambda\sqrt{m}$ n'est pas un entier, il faut refaire le même raisonnement sur $s = \lambda\sqrt{m} - \alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Comme $\frac{\alpha}{\sqrt{m}}$ tend vers zéro, on constate qu'on obtient la même limite e^{λ^2} et la même formule (10). La loi de Gauss est donc démontrée dans le cas symétrique.

3. Passons au cas asymétrique, c'est-à-dire posons $p \neq q$, par exemple $p > q$. Supposons d'abord np et $\lambda\sqrt{2pqn}$ entiers et décomposons $A_n(s)$ en deux facteurs, comme dans le cas symétrique

$$A_n(s) = \frac{n!}{np!\, nq!} p^{np} q^{nq} \sqrt{4pqn} \,.$$

$$\cdot \frac{np\,.\,(np-1)\ldots(np-s+2)(np-s+1)}{(nq+s)(nq+s-1)\ldots(nq+2)(nq+1)} \cdot \frac{q^s}{p^s} . \tag{11}$$

Soient

$$A_n(0) = \frac{n!}{np!\, nq!} p^{np} q^{nq} \sqrt{4pqn} \tag{12}$$

et $B_n(s)$ le produit restant, alors

$$A_n(s) = A_n(0)\,.\,B_n(s) . \tag{13}$$

Considérons en premier lieu la limite de $B_n(s)$.

$$B_n(s) = \frac{npq}{npq + sp} \cdot \frac{npq - q}{npq + sp - p} \cdot \ldots$$

$$\cdot \frac{npq - sq + 2q}{npq + 2p} \cdot \frac{npq - sq + q}{npq + p} ,$$

d'où

$$\frac{1}{B_n(s)} = \left(1 + \frac{sp}{npq}\right)\left(1 + \frac{sp - (p-q)}{npq - q}\right) \cdots$$
$$\left(1 + \frac{sq + 2(p-q)}{npq - sq + 2q}\right)\left(1 + \frac{sq + (p-q)}{npq - sq + q}\right). \qquad (14)$$

Les limites de $\left(1 + \frac{sp}{npq}\right)^s$ et $\left(1 + \frac{sq + (p-q)}{npq - sq + q}\right)^s$ sont ici $e^{2p\lambda^2}$ et $e^{2q\lambda^2}$; elles sont alors trop larges. On parvient cependant aux suites limitantes convenables pour $\frac{1}{B_n(s)}$ en groupant les facteurs de (14) deux à deux, le premier avec le dernier, etc. On prouve aisément (par exemple dans la formule (11)) que ces couples de facteurs vont en croissant pour n suffisamment grand, p étant plus grand que q, donc

$$\left(1 + \frac{sp}{npq}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{sq + (p-q)}{npq - sq + q}\right)^{s/2} < \frac{1}{B_n(s)}$$
$$< \left(1 + \frac{s + 2(p-q)}{2npq - sq + 2q}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{s}{2npq - sq}\right)^{s/2},$$

si s est un nombre pair, et d'une manière analogue pour s impair. Pour $s = \lambda\sqrt{2pqn}$ les suites limitantes tendent vers les mêmes limites que les suites

$$\left(1 + \frac{s}{nq}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{s}{np}\right)^{s/2} \qquad \text{et} \qquad \left(1 + \frac{s}{2npq}\right)^{s/2} \cdot \left(1 + \frac{s}{2npq}\right)^{s/2}$$

qui sont moins compliquées. En introduisant $s = \lambda\sqrt{2pqn}$ on voit, que la suite limitante inférieurement tend vers $e^{p\lambda^2} . e^{q\lambda^2} = e^{\lambda^2}$ et la suite limitante supérieurement vers

$$e^{\frac{1}{2}\lambda^2} . e^{\frac{1}{2}\lambda^2} = e^{\lambda^2}.$$

Donc

$$\lim_{n \to \infty} B_n(s) = e^{-\lambda^2}. \qquad (15)$$

On voit ici clairement pourquoi on a adopté pour s la forme

$$\lambda\sqrt{2pqn}.$$

4. Il reste à prouver que la limite de la suite $A_n(0)$ dans (12) est $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Posons $\mathbf{n} = \mathbf{2m}$, ce qui est sans influence sur la valeur de la limite — comme dans le cas symétrique. Il vient

$$A_n(0) = A_{2m}(0) = \frac{2m\,!}{2mp\,!\;2mq\,!}\, p^{2mp}\, q^{2mq} \sqrt{4pq\,.\,2m}\,. \tag{16}$$

Cette suite est une généralisation de la suite (3) de Wallis et pour $p = q = \frac{1}{2}$ elle est identique à (3). Mettons en évidence la suite W_{2m} de Wallis. Il vient

$$A_{2m}(0) = W_{2m}\,.\,C_{2m} = \frac{2m\,!}{m\,!^2}\,\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}\cdot\frac{m\,!^2}{2mp\,!\;2mq\,!}\,(2p)^{2mp}\,(2q)^{2mq}\sqrt{4pq}\,. \tag{17}$$

En simplifiant la fraction, on ramène C_{2m} à la forme

$$C_{2m} = \frac{(2mq+1)(2mq+2)\;\ldots\;(m-1)\,m}{2mp\,(2mp-1)\;\ldots\;(m+2)(m+1)}\,.\,(2p)^{2mp+\frac{1}{2}}\,(2q)^{2mq+\frac{1}{2}}\,,$$

ou

$$C_{2m} = \frac{(2mq+1)(2mq+2)\;\ldots\;(m-2)(m-1)}{(2mp-1)(2mp-2)\;\ldots\;(m+2)(m+1)}\,(2p)^{2mp-\frac{1}{2}}\,(2q)^{2mq+\frac{1}{2}}\,.$$

Nous réunissons et complétons les facteurs correspondants pour obtenir les suites de la forme exponentielle. Par exemple, on transforme $\frac{(2p)^{2mp-\frac{1}{2}}}{2mp-1}$ en $\left(\frac{2mp}{2mp-1}\right)^{2mp-\frac{1}{2}}$ en multipliant et en divisant par $\frac{m^{2mp-\frac{1}{2}}}{(2mp-1)^{2mp-\frac{3}{2}}}$. Ensuite on transforme $\frac{(2mp-1)^{2mp-\frac{3}{2}}}{2mp-2}$ en $\left(\frac{2mp-1}{2mp-2}\right)^{2mp-\frac{3}{2}}$ et ainsi de suite. On parvient de cette manière à l'expression suivante

$$C_{2m} = \frac{\left(1+\frac{1}{2mp-1}\right)^{2mp-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2mp-2}\right)^{2mp-\frac{3}{2}}\cdots\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2mq}\right)^{2mq+\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2mq+1}\right)^{2mq+\frac{3}{2}}\cdots\left(1+\frac{1}{m-2}\right)^{m-\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-\frac{1}{2}}} \tag{18}$$

On peut enfermer les termes de cette suite entre deux suites, qui tendent vers la même limite 1. Il y a $\mathbf{2mp - m = m - 2mq}$

facteurs dans le numérateur et dans le dénominateur. Nous appliquons à chaque facteur les inégalités connues

$$e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)} \tag{19}$$

qu'on obtient aisément du développement de $\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

Prenons d'abord pour les facteurs du numérateur les nombres e, qui sont plus petits et dans le dénominateur les nombres $e^{1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)}$, qui sont plus grands et ensuite inversement. Nous trouvons

$$\frac{e^{2mp-m}}{e^{2mp-m+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2mq} - \frac{1}{2mq+1} + \frac{1}{2mq+1} - \frac{1}{m}\right)}} < C_{2m}$$

$$< \frac{e^{2mp-m+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} \cdots - \frac{1}{2mp}\right)}}{e^{2mp-m}}$$

ou

$$e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2mq} - \frac{1}{m}\right)} < C_{2m} < e^{+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2mp}\right)} .$$

Les suites limitantes tendent ici vers 1, donc

$$\lim_{m \to \infty} C_{2m} = 1 . \tag{20}$$

La formule (17) devient alors

$$\lim_{n \to \infty} A_n(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \tag{21}$$

Les formules (13), (15) et (21) donnent

$$\underline{\lim_{n \to \infty} A_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\lambda^2}} .$$

La loi de Gauss est donc démontrée aussi dans le cas asymétrique.

Nous avons supposé np et $\lambda\sqrt{2pqn}$ entiers. S'il n'en est pas ainsi, il faut introduire dans les raisonnements $E(np) = np - \alpha$ et

$$E(\lambda\sqrt{2pqn}) = \lambda\sqrt{2pqn} - \beta \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \beta < 1$$

et compléter toute la discussion. On constate qu'on obtient les mêmes limites pour $B_n(s)$, C_{2m}, $A_n(0)$ et $A_n(s)$. Nous ne ferons pas ici cette discussion minutieuse qui n'est ni difficile ni intéressante.

5. *Remarques.* — 1° Les formules (21) et (16) fournissent une généralisation intéressante de la formule de WALLIS. Si np n'est pas un entier, nous pouvons écrire cette formule généralisée de la manière suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{E(np)!\,(n-E(np))!}\, p^{E(np)}\, q^{n-E(np)} \sqrt{4pqn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \qquad (22)$$

2° Par des raisonnements tout à fait analogues à la démonstration de la formule (20) on peut démontrer la formule de STIRLING. D'abord la formule (3) de WALLIS fournit en divisant par $m!$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{W_{2m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{m!\,2^{2m}}{(2m-1)(2m-2)\ldots(m+2)(m+1)\,2m\sqrt{2m}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ou

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!\,2^{2m-1/2}}{2(2m-1)(2m-2)\ldots(m+2)(m+1)\,m^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

En procédant ici de la même manière que pour C_{2m} on trouve l'identité

$$\frac{1}{W_{2m}} = \frac{m!}{2m^{m+1/2}}\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)^{2m-1/2}\cdot\left(1+\frac{1}{2m-2}\right)^{2m-3/2}\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1/2}.$$

Les inégalités (19) donnent ici

$$\frac{m!\,e^m}{2\,m^{m+1/2}} < \frac{1}{W_{2m}} < \frac{m!\,e^{m+\frac{1}{24m}}}{2m^{m+1/2}}$$

donc

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{W_{2m}} : \frac{m!\,e^m}{2m^{m+1/2}}\right) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{m!}{m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}} = 1\,. \qquad (23)$$

La formule de STIRLING est démontrée.

Pour parvenir à la formule

$$m! = \sqrt{2\pi m}\; m^m e^{-m+\frac{\theta}{12m}} \qquad (24)$$

il suffit de former le quotient de deux termes consécutifs de la suite s_m qui figure dans (23)

$$\frac{s_m}{s_{m+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{e}$$

et appliquer encore une fois les inégalités (19) (*v.* E. Cesàro, *Elementares Handbuch der algebraischen Analysis.* Leipzig. 1904; p. 154–155).

Lwów, Pologne, mars 1926.

LES ÉPREUVES RÉPÉTÉES

ET LA

MÉTHODE DES FRACTIONS CONTINUES DE MARKOFF

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

Considérons une suite de s épreuves comportant deux événements contradictoires A et B de probabilités constantes p et q (conditions de Bernoulli) et soit P la probabilité pour que le nombre de réalisations m de l'événement A soit compris au sens large entre deux nombres donnés m_1, m_2. On sait que P est égale à la somme

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} C_s^m p^m q^{s-m} .$$

Envisageons le binome

$$\begin{aligned}(q+p)^s = q^s &+ C_s' p q^{s-1} + \dots \\ &+ C_s^{m_1} p^{m_1} q^{s-m_1} + \dots + C_s^{m_2} p^{m_2} q^{s-m_2} \\ &+ C_s^{m_2+1} p^{m_2+1} q^{s-m_2-1} + \dots + p^s .\end{aligned} \tag{1}$$