Trajectoires orthogonales et ombilics.

Autor(en): **Delens, P.-C.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

donc

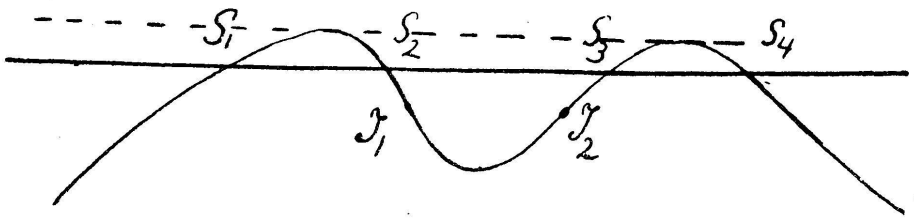
$$\psi(u) = 2\wp u \wp' u \left\{ \wp' u - \wp'\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \right\} - \wp'' u \left\{ \wp^2 u - \wp^2\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \right\} = 0 \ ;$$

$\psi(u)$ a le point $u = 0$ pour pôle d'ordre 8, le point $u = \frac{\omega}{2}$ pour pôle d'ordre 4, donc $\psi(u)$ a 12 zéros. Les zéros $\frac{\omega}{4}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega''}{2}$ sont doubles et satisfont à $u \equiv \frac{\omega}{2} - u$. Restent 4 zéros, et nous trouvons *deux bitangentes* joignant les deux paires de points correspondants. D'une manière analogue pour $u + v \equiv \frac{\omega'}{2}$ ou $\frac{\omega''}{2}$, donc hors de la droite à l'infini la courbe a 7 bitangentes.

Que la droite à l'infini, qui coupe la courbe en 4 points coïncidant avec le point à l'infini de $x = 0$ doive compter pour une seule bitangente, devient clair si nous cherchons les points d'inflexion. Hors du point à l'infini ces points correspondent aux solutions de

$$\wp^{\mathrm{II}} u + \wp^{\mathrm{IV}} u - (\wp^{\mathrm{III}} u)^2 = 0 \ ,$$

donc il y en a 10. Par suite le point à l'infini compte pour 2 points d'inflexion dans le sens de Plücker. La figure ci-dessous peut illustrer un peu la chose.



Si les points S_i se réunissent, les deux points d'inflexion se réunissent dans le même point.

J. Wolff (Utrecht).

Trajectoires orthogonales et ombilics.

Je voudrais, sans toucher au fond même du problème, ajouter quelques remarques aux intéressantes considérations présentées par M. Marcel Winants dans un récent article (Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic ? *L'Enseignement mathématique*, 24me année, p. 239, 1925).

I. Les différentes configurations de trajectoires orthogonales indiquées au premier paragraphe de cet article appartiennent à une

même classe, ces configurations étant toutes isothermes, et pouvant se déduire de l'une d'elles par des transformations conformes. Aussi leurs singularités sont-elles dues, d'une part, à la configuration initiale, d'autre part, aux transformations conformes particulières employées.

Partons d'un système d'axes rectangulaires ox, oy et utilisons la variable complexe $z = x + iy$; représentons une transformation conforme par $Z = f(z)$, la fonction f étant analytique. On passe ainsi de la configuration α) aux configurations β), puis γ), et de β) à δ) par les transformations:

$$Z = e^z , \qquad Z = a + \frac{4a^2}{z - a} , \qquad Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right) .$$

Or la configuration initiale α) présentait un point singulier au point à l'infini du plan complexe (on ne peut guère s'abstenir de considérer cet élément); les singularités des fonctions de transformation sont bien connues et l'on peut suivre les transformations des singularités sur les configurations successives. Il est alors facile de construire des configurations de trajectoires orthogonales présentant certaines singularités; ainsi la transformation:

$$Z = z^{\frac{1}{3}}$$

transformerait la configuration α) en celle des courbes:

$$x(x^2 - 3y^2) = \text{const.} \qquad y(3x^2 - y^2) = \text{const.} \qquad (\varepsilon)$$

faciles à construire, et présentant toutes une symétrie ternaire autour de l'origine, point de ramification où se croisent six droites, trois d'entre elles appartenant à la première famille de courbes, dont elles sont les asymptotes, les trois autres jouant le même rôle pour la seconde famille. Le point à l'infini est également point singulier d'une autre espèce. On verrait aisément comment les transformations énoncées précédemment, ou leurs inverses, modifieraient cette configuration.

II. Il semble que pour l'étude des lignes de courbure d'une surface en un ombilic, on puisse se proposer la marche suivante: utiliser une représentation conforme de la surface qui transforme leur système en une configuration de trajectoires orthogonales du plan, les surfaces isothermiques (à lignes de courbure isothermes) donnant en particulier une configuration isotherme. Tenter ensuite de reconnaître à quelle classe appartient le système obtenu, vis-à-vis des transformations conformes; je ne sais d'ailleurs pas si une telle classification des familles de courbes, ou des équations différentielles du premier ordre, a déjà été obtenue (les familles isothermes donnent en coordonnées symétriques une équation où les variables se séparent). On pour-

rait alors, par une transformation conforme, ramener le réseau orthogonal à une forme type simple: la connaissance des singularités de cette forme, et de celles des transformations employées, montrerait ainsi la nature des singularités aux ombilics.

Signalons en particulier, pour les quadriques, surfaces isothermiques, la représentation conforme obtenue par la déformation d'Ivory, où la surface s'aplatit sur le plan en restant homofocale à elle-même.

Le Hâvre, le 9 mars 1926.

P.-C. DELENS.

A propos d'un article de M. Winants sur le nombre de lignes de courbure passant par un ombilic.

1. — *Lettre de M. Emile Picard*, Membre de l'Institut.

Cher Monsieur Fehr,

Dans son numéro paru en janvier 1926 (Tome 24, p. 239), l'*Enseignement mathématique* contient un article de M. Winants, intitulé: « Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic ? ». L'auteur dit que cette question n'a été qu'effleurée dans mon *Traité d'Analyse*. Je ne puis partager cette opinion. On trouve dans le Tome III de mon Traité (2me édition, 1908, page 223, une section ayant pour titre: « *Equations du premier ordre et de degré supérieur. Application à la recherche des lignes de courbure passant par un ombilic* », qui avait d'ailleurs été antérieurement résumée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences (11 mars 1895). J'y fais la discussion pour le cas général des points singuliers d'une équation du premier ordre et du second degré, et j'applique les résultats trouvés au problème des lignes de courbure passant par un ombilic. Je montre que, *suivant les cas, il y a une seule ligne de courbure ou une infinité de lignes de courbure passant par un ombilic et ayant pour tangente une des directions données par une certaine équation du troisième degré.* Appliquée aux quadriques, cette étude montre que, pour ces surfaces, il ne passe par un ombilic qu'une seule ligne de courbure, résultat d'ailleurs bien connu.

Je vous serais obligé de bien vouloir insérer cette lettre dans l'*Enseignement mathématique*, et je vous prie de croire, cher Monsieur, à mes sentiments cordialement dévoués.

Paris, le 22 mars 1926.

Emile PICARD.