Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINS FRACTIONS CONTINUES RELATIVES A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE

Autor: Appell, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20680

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR CERTAINES FRACTIONS CONTINUES RELATIVES A LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

La série hypergéométrique de Gauss est maintenant entrée dans l'enseignement. On sait que Gauss a donné des développements en fraction continue qui s'y rattachent (Oeuvres, t. III, p. 134 et suiv.) et qui ont été ramenés à un point de vue général. Voici d'autres fractions continues obtenues également en partant des relations entre les fonctions contiguës. Gauss a donné [*ibid.* p. 130 éq. (15)] la relation suivante que nous écrivons ici en changeant γ en $\gamma + 1$ et en posant

$$F_0 = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad F_1 = F(\alpha, \beta, \gamma + 1, x),$$
$$F_2 = F(\alpha, \beta, \gamma + 2, x),$$

$$-\gamma(\gamma + 1)(1 - x)F_0 + (\gamma + 1)[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x]F_1$$
$$+ (\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta)xF_2 = 0. \qquad (1)$$

Divisons par le terme du milieu et posons:

$$\Psi = \frac{\gamma(1 - x)}{\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x}\frac{F_0}{F_1}.$$

En appelant Ψ_1 la quantité déduite de Ψ en y changeant γ en $\gamma + 1$

$$\Psi_1 = \frac{(\gamma + 1)(1 - x)}{\gamma + 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 3)}\frac{F_1}{F_2},$$

la relation (1) devient

$$-\Psi + 1 + \frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta)x}{(\gamma + 1)[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x]}\frac{F_2}{F_1} = 0,$$

$$\Psi = 1 + \frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta)x(1 - x)}{[\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x][\gamma + 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 3)x]}\frac{1}{\Psi_1}.$$

On a de même

$$\Psi_1 = 1 + \frac{(\gamma + 2 - \alpha)(\gamma + 2 - \beta)x(1 - x)}{[\gamma + 1 - (2\gamma - \alpha - \beta + 3)x][\gamma + 2 - (2\gamma - \alpha - \beta + 5)x]} \frac{1}{\Psi_2},$$

et ainsi de suite, en changeant chaque fois γ en $\gamma + 1$. On obtient ainsi la fraction continue

$$\Psi = 1 + \cfrac{u_1}{1 + \cfrac{u_2}{1 + \cfrac{u_3}{1 + \cfrac{u_4}{1 + \ddots}}}},$$

$$u_\nu = \frac{(\gamma + \nu - \alpha)(\gamma + \nu - \beta)x(1 - x)}{[(\gamma + \nu - 1) - (2\gamma - \alpha - \beta + 2\nu - 1)x][(\gamma + \nu) - (2\gamma - \alpha - \beta + 2\nu + 1)x]},$$

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu = \frac{x(1 - x)}{(1 - 2x)^2}, \qquad \lim \Psi_\nu = \frac{1 - x}{1 - 2x}.$$

Exemple. — On a (Gauss, *ibid.*, p. 127, éq. XXI et XVI).

$$\cos nt = \cos t\, F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \sin^2 t\right) = \cos t\, F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

$$\sin nt = n \sin t\, F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \sin^2 t\right) = n \sin t\, F(\alpha, \beta, \gamma', x),$$

$$\alpha = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\quad \beta = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2},\quad \gamma = \frac{1}{2},\quad \gamma' = \gamma + 1 = \frac{3}{2},\quad x = \sin^2 t.$$

Alors

$$\Psi = \frac{n \operatorname{cotg} nt}{2 \operatorname{cotg} 2t}, \qquad u_\nu = \frac{1}{4}\,\frac{\nu^2 - \frac{n^2}{4}}{\nu^2 - \frac{1}{4}} \operatorname{tg}^2 2t,$$

$$\frac{n \operatorname{cotg} nt}{2 \operatorname{cotg} 2t} = 1 + \cfrac{\frac{1}{4}\,\frac{1 - \frac{n^2}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \operatorname{tg}^2 2t}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}\,\frac{4 - \frac{x^2}{4}}{4 - \frac{1}{4}} \operatorname{tg}^2 2t}{1 + \cdots}},$$

formule finie si $n^2 = 4\nu^2$.

On peut faire un usage analogue des équations (1) et (1 D) de Gauss (*loc. cit.* p. 130) en faisant jouer à α et β le rôle de γ.

En posant

$$\Psi = \frac{\gamma - \alpha - 1}{\gamma - 2\alpha - 2 - (\beta - \alpha - 1)x} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha + 1, \beta, \gamma, x)}$$

$$= \frac{\gamma - \alpha - 1}{\gamma - 2\alpha - 2 - (\beta - \alpha - 1)x} \frac{F_0}{F_1},$$

on a une fraction continue dans laquelle

$$u_\nu = \frac{(\alpha + \nu)(\gamma - \alpha - \nu - 1)(1 - x)}{[(\gamma - 2\alpha - 2\nu) - (\beta - \alpha - \nu)x][\gamma - 2\alpha - 2\nu - 2 - (\beta - \alpha - \nu - 1)x^2]},$$

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu = \frac{x - 1}{(x - 2)^2}, \qquad \lim \Psi_\nu = \frac{1}{2 - x}.$$

Pour l'équation (10) de Gauss il suffit de permuter dans ce qui précède α et β.

Dans le calcul différentiel de J. Bertrand on trouve (p. 430 et suiv.) des vues générales sur les fractions continues analytiques; le caractère de ces fractions a été mis en lumière par M. Padé dont nous indiquons les mémoires à la fin de cet article.

La série

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{1.2.3}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \cdots$$

considérée par Legendre dans une Note mise à la fin de sa Géométrie a été développée par lui en fraction continue. Elle se déduit de la série de Gauss en y supprimant, dans le terme général, les factorielles $\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)$ et $\beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1)$. Il y aurait intérêt à traiter de même la fonction

$$f(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

qui se réduit à e^z pour $\alpha = \gamma$. La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ devient, quand on y pose $\beta = k$, $x = \frac{z}{k}$ et qu'ensuite on fait $k = \infty$,

$$F\left(\alpha, k, \gamma, \frac{z}{k}\right) = f(\alpha, \gamma, z).$$

La même fonction où on fait

$$\alpha = k\,, \quad \beta = k\,, \quad \gamma = z\,, \quad x = \frac{a}{k^2}\,, \quad k = \infty$$

devient

$$F\left(k\,, k\,, z\,, \frac{a}{k^2}\right) = \varphi(z)\,.$$

Les formules (15) et (1) de Gauss (Oeuvres, t. IV, p. 130) se réduisent alors pour f à

$$0 = \gamma[\gamma - 1 + z]f(\alpha\,, \gamma\,, z) - (\gamma - \alpha)zf(\alpha\,, \gamma + 1\,, z) - \gamma(\gamma - 1)f(\alpha\,, \gamma - 1\,, z) = 0\,,$$

$$0 = (\gamma - 2\alpha + z)f(\alpha\,, \gamma\,, z) + \alpha f(\alpha + 1\,, \gamma\,, z) - (\gamma - \alpha)f(\alpha - 1\,, \gamma\,, z) = 0\,,$$

et pour φ

$$0 = z(z - 1)\varphi(z) + \alpha\varphi(z + 1) - z(z - 1)\varphi(z - 1)\,,$$

qui, en y changeant z en $z + 1$ donne la relation de Legendre, remarque qui a probablement été faite. Les deux relations précédentes où on change γ en $\gamma + 1$ dans la première et α en $\alpha + 1$ dans la deuxième, donnent lieu à des fractions continues qu'il est facile d'écrire.

Voici pour terminer l'indication des Mémoires que M. Padé a publiés sur les fractions continues. Ces Mémoires ont tous paru dans les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*,

Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. 91 p. (9, 1892).

Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle, pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques. 32 p. (16, 1899).

Recherches nouvelles sur la distribution des fractions rationnelles approchées d'une fonction. 37 p. (19, 1902).

Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions. 60 p. (24, 1907).

Sur la généralisation des formules de Sylvester relatives aux fonctions qui se présentent dans l'application du théorème de Sturm et sur la convergence de la table des réduites d'une fraction rationnelle. 16 p. (24, 1907).

A ces travaux il convient d'ajouter un Mémoire de M. Montessus de Ballore à Lille, *Sur les fractions continues algébriques*, (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. XIX, année 1905, p. 185-257).