problème de Diophante.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Le problème de Diophante.

1. L'objet de la trente-deuxième proposition du Ve livre de l'Arithmétique de Diophante d'Alexandrie est de *trouver trois bicarrés dont la somme soit un carré parfait.* Il s'agit donc de résoudre en nombre rationnels l'équation indéterminée:

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

(la résolution en entiers en découlant). L'exemple donné par Diophante est celui des nombres

$$x = \frac{12}{5} , \qquad y = 3 , \qquad z = 4 .$$

Quelques réflexions viennent à l'esprit, à l'énoncé même de cette question vraiment inattendue dans cet ouvrage. Diophante vient de traiter, en effet, (V^e livre, problèmes 18 et 19) le cas de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 = U^2 ;$$

mais il passe sous silence les équations:

$$x^4 + y^4 = U^2 ,$$
$$x^4 - y^4 = U^2 ,$$
$$x^3 + y^3 = U^2 ,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = U^2 ;$$

les deux premières sont impossibles; la troisième et la quatrième sont possibles. C'est l'observation consignée par Fermat à propos du problème V, 32: « Cur autem non quaerat duo qua-« dratoquadratos quorum summa sit quadratus ? Sane haec « questio est impossibilis, ut nostra demonstrandi methodus « potest haud dubie expedire ».

Ainsi donc, alors que la moindre allusion ne se trouve faite à des équations plus simples de forme, Diophante soulève brusquement la question de la remarquable équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

et son analyse même, si elle ne fournit pas la solution générale, a le double mérite et d'une certaine généralité et d'une profonde

signification arithmogéométrique. La méthode du mathématicien d'Alexandrie est extrêmement curieuse; elle consiste à prendre y et z égaux aux cathètes d'un arithmotriangle pythagorique quelconque, puis à poser

$$x = \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2}} ;$$

en d'autres termes, puisque la relation précédente n'est autre que celle,

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} ,$$

qui relie la hauteur relative à l'hypoténuse aux deux côtés de l'angle droit, *la solution donnée par* DIOPHANTE *est constituée par les trois hauteurs d'un arithmotriangle pythagorique quelconque.*

Cette solution dépend non seulement du paramètre d'intérêt secondaire de similitude, mais aussi du paramètre caractéristique de la forme même du triangle. En introduisant la représentation arithmotrigonométrique (c'est-à-dire en prenant pour paramètre l'angle θ tel que $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$ soit un nombre rationnel et arbitraire), à un facteur près de similitude, cette solution s'écrit sous la forme suivante:

$$y = \sin\theta , \qquad z = \cos\theta ,$$

$$x = \frac{1}{2}\sin 2\theta , \qquad U = 1 - \sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{y^2 + z^2} ,$$

comme celà résulte de l'identité:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta = (1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)^2 .$$

C'est ainsi qu'après la solution

$$x = 12 , \qquad y = 15 , \qquad z = 20 , \qquad U = 481 ,$$

de DIOPHANTE, il est possible de former toute une série de solutions relativement simples respectivement attachées aux triangles pythagoriques, par exemple:

$$x = 60 , \qquad y = 65 , \qquad z = 156 .$$

2. Pour résoudre ce problème, une méthode simple consiste à le rattacher aux équations de Fermat:

$$X = x^4 + a = \square .$$

Partons, en effet, d'une solution connue: elle est, par exemple, une de celles fournies par la considération des triangles pythagoriques. C'est ainsi qu'en prenant pour a la valeur

$$a = 12^4 + 20^4 = 2^9.353 ,$$

l'équation ci-dessus est vérifiée par $x = 15$, $\sqrt{X} = 481$. La solution générale de cette équation indéterminée de Fermat est:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u}{pu} , \qquad \sqrt{X} = \frac{p^2u + \frac{1}{4}a}{pu} ,$$

$$p'^2 = 4p^3u - g_2 pu - g_3 , \qquad g_2 = a , \qquad g_3 = 0 ;$$

la cubique normale est *harmonique*. En outre, d'après la formation même de l'équation considérée, g_2 est positif mais non carré parfait (puisque la somme de deux bicarrés n'est jamais égale à un carré). L'équation $p'u = 0$ a donc ses trois racines réelles; mais seule la racine $e_2 = p\omega_2 = 0$ $(u = \omega_2)$ est rationnelle, ce qui écarte pour l'application arithmétique, un certain nombre de formules utiles de la théorie des fonctions de Weierstrass. De toute racine connue, on déduira immédiatement $u + \omega_2$, $2u$, $3u$, etc... par des formules auxquelles le caractère harmonique de la cubique normale apporte des simplifications appréciables pour la rapidité des calculs. Le théorème d'addition permettra ensuite, deux solutions quelconques u et v étant acquises, de former de nouvelles solutions $u \pm v$, etc...:

$$p(u + \omega_1) = -\frac{\frac{1}{4} \cdot g_2}{pu} ,$$

$$p2u = \left[\frac{p^2u + \frac{1}{4}g_2}{p'u}\right]^2 ,$$

$$p'2u = \frac{2\sqrt{p2u}}{p'^2u}\left[\left(p^2u + \frac{1}{4}g_2\right)^2 - 2g_2 p^2u\right] .$$

La solution primitive $\wp u$ est déterminée au moyen de la solution considérée du problème de DIOPHANTE. Les formules de correspondance,

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u}, \qquad \pm \mathrm{U} = x^2 - 2\wp u,$$

donnent:

$$\wp u = \frac{1}{2}(x^2 \pm \mathrm{U}), \qquad \wp' u = 2x.\wp u,$$

d'où deux valeurs distinctes de $\wp u$; leur produit est identiquement égal à $-\frac{1}{4} g_2$: la somme ou la différence des arguments est donc égale à la demi-période réelle ω_2. En fait, aux périodes près, sont connues initialement quatre solutions, correspondant à quatre points de la cubique. L'un des arguments étant u, les autres sont $-u$, $u + \omega_2$ et $\omega_2 - u$.

Dans le cas $g_2 = 2^9.353$, $g_3 = 0$, la connaissance de $x = 15$, $\mathrm{U} = 481$, donne donc:

$$\wp u = 353, \qquad \wp' u = -10.590, \qquad \wp'' u = 2.353.931,$$

$$\wp(u + \omega_2) = -128, \qquad \wp'(u + \omega_2) = 3.840, \qquad \wp''(u + \omega_2) = 2^8.31,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{30}\right)^2, \qquad \wp' 2u = \frac{481 \times 130.111}{2^2.3^3.5^3}.$$

$$\wp(2u + \omega_2) = -\frac{2^9.3^2.5^2.353}{481^2};$$

d'où la nouvelle solution du problème de Diophante:

$$x = \frac{130.111}{2.3.5.481}, \qquad y = 12, \qquad z = 20.$$

3. — La connaissance d'une solution quelconque (x, y, z) du problème de Diophante permet de lui associer trois équations de Weierstrass distinctes, chacune de celles-ci ayant une solution connue; à la solution même de DIOPHANTE sont ainsi associées les trois équations avec $g_3 = 0$ et les valeurs respectives de g_2 suivantes:

$$g_2 = 2^9.353, \qquad x = 15, \qquad \text{(I)}$$

$$g_2 = 3^4.881, \qquad x = 20, \qquad \text{(II)}$$

$$g_2 = 5^4.337, \qquad x = 12. \qquad \text{(III)}$$

Dans le cas de l'équation II, les valeurs $x = 20$, $U = 81.881$ conduisent à

$$\wp u = -\frac{81}{2}, \qquad \wp' u = -20.81,$$

$$\wp(u + \omega_3) = \frac{881}{2}, \qquad \wp'(u + \omega_3) = 20.881,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{40}\right)^2, \qquad \wp' 2u = \frac{481 \times 88{\cdot}639}{40^3},$$

d'où la solution:

$$x = \frac{88{\cdot}639}{80.481}, \qquad y = 12, \qquad z = 15,$$

Enfin dans le IIIe cas,

$$g_2 = 5^4 \times 337, \qquad g_3 = 0,$$

la solution primitive sera

$$\wp u = \frac{625}{2}, \qquad \wp' u = 12 \times 625, \qquad \wp'' u = 625 \times 769$$

$$\wp(u + \omega_2) = -\frac{337}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = 12 \times 337, \quad \wp''(u + \omega_2) = 337 \times 193$$

d'où:

$$\wp 2u = \left[\frac{13 \times 37}{24}\right]^2.$$

Formules pour $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$.

4. — Soit une équation définissant, d'une manière plus générale, une fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$; r est un paramètre rationnel et quelconque. Quelle que soit la valeur de ce paramètre r, l'équation cubique admet les solutions:

$$\wp u = \frac{1}{2}, \qquad \wp' u = \pm r;$$

$$\wp(u + \omega_2) = r^2 - \frac{1}{2}, \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm r(2r^2 - 1);$$

$$\wp 2u = \left(\frac{r^2 - 1}{2r}\right)^2, \qquad \wp' 2u = \pm \frac{r^2 - 1}{4r^3}(r^4 + 2r^2 - 1);$$

$$\wp(2u + \omega_2) = \frac{r^2(2r^2 - 1)}{(r^2 - 1)^2}, \qquad \wp'(2u + \omega_2) = \pm r(r^4 + 2r^2 - 1)\frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^3}.$$