Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE
Autor: Turrière, É.
Kapitel: Sur certains triangles arithmogéométriques.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si donc nous posons toujours

$$\wp'^2 u = 4\wp u(\wp^2 u - g_2) ,$$

avec la valeur spécifiée ci-dessus de l'invariant g_2 en fonction entière de t^4, les formules de correspondance avec le problème de DIOPHANTE sont maintenant:

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u} , \qquad U = x^2 - 2\wp u ,$$

$$y = 1 - t^2 , \qquad z = 1 + t^2 .$$

Parmi les solutions, celle de DIOPHANTE est

$$x = \frac{1 - t^4}{2t} , \qquad U = \frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} - (1 - t^2)^2 .$$

La solution correspondante de l'équation de la fonction de WEIERSTRASS est:

$$\wp u = -2t^2 , \qquad \wp' u = \pm 2t(t^4 - 1) ,$$

$$\wp(u + \omega_2) = \frac{g_2}{8t^2} , \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm \frac{g_2(1 + t^2)}{8t^3} ,$$

$$\sqrt{\wp^2 u} = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{4t(t^4 - 1)} ,$$

$$\wp'^2 u = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{32t^3(t^4 - 1)^3}(t^{16} - 36t^{12} - 186t^8 - 36t^4 + 1) ;$$

à remarquer la présence du facteur octaédrique $t^8 + 14t^4 + 1$.

Pour $t = 2$, ces formules donnent $g_2 = 706 = 2 \times 353$,

$$\wp u = -8 , \qquad \wp' u = 60 ,$$

$$\wp^2 u = \left(\frac{481}{120}\right)^2 , \qquad \wp'^2 u = \frac{130\,111 \times 481}{2^8 . 3^3 . 5^3} .$$

d'où la solution $x = \frac{130\,111}{2^3 . 3 . 5 . 481}$, $y = 3$, $z = 5$ antérieurement donnée.

SUR CERTAINS TRIANGLES ARITHMOGÉOMÉTRIQUES.

6. — La question précédente pose la recherche des *triangles tels que la somme des quatrièmes puissances de deux de leurs côtés*

et de la hauteur issue du sommet qu'ils définissent soit un carré parfait.

Tout arithmotriangle pythagorique est de cette nature. Il en est de même de tout *arithmotriangle héronien tel que les deux bissectrices intérieure et extérieure issues d'un même sommet soient égales.* Ces triangles, définis par la condition $C - B = \frac{\pi}{2}$, se construisent simplement au moyen des triangles rectangles. Ils peuvent être arithmogéométriquement représentés par les formules:

$$A = \frac{\pi}{2} - 2\theta , \qquad a = \cos 2\theta ,$$

$$B = \theta , \qquad b = \sin\theta ,$$

$$C = \frac{\pi}{2} + 2\theta , \qquad c = \cos\theta .$$

$$2R = 1 , \qquad S = \frac{1}{8}\sin 4\theta ;$$

de même que pour les triangles pythagoriques, cette surface S ne saurait être mesurée par un nombre carré parfait. Les deux bissectrices des angles en A ont pour longueur commune $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta$. Les bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet B ont pour longueurs respectives

$$\frac{\cos\theta.\cos 2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\theta.\cos 2\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta} ;$$

elles peuvent être mesurées rationnellement (pour $\operatorname{tang}\frac{1}{4}\theta$ rationnel). En aucun cas, il ne peut en être de même des bissectrices égales issues de A ni de celles des angles en C.

La solution du problème arithmogéométrique posé est difficile; mais son étude met en évidence une équation intéressante. En exprimant que $b^4 + c^4 + h_a^4 = \square$, on obtient en effet l'équation de Fermat:

$$x^4 + 2\frac{\cos 2A}{\sin^2 A}x^2 + 4.\operatorname{cotg} A.x + 1 = y^2 .$$

ou encore

$$(x^2 - 1)^2 + 2x \operatorname{cotg} A (x \operatorname{cotg} A + 2) = y^2 ,$$

où $x = \frac{h_a}{a}$. Cette équation admet les solutions évidentes

$$x = 0 \ , \quad \infty \ , \quad -2 \operatorname{tang} A \ , \quad \frac{2 \operatorname{cotg} A}{2 - \operatorname{cotg}^2 A} \ , \quad \frac{1}{4} \operatorname{cotg} A (\operatorname{cotg}^2 A - 2) \ ,$$

quelle que soit la valeur rationnelle de tang A. En outre elle est satisfaite identiquement pour $A = \frac{\pi}{2}$ (c'est le cas des triangles rectangles); pour $B - C = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} A$ est solution (triangle à bissectrices égales, issues de A).

En posant $\operatorname{cotg} A = \gamma$, l'équation devient

$$y^2 = (x^2 - 1)^2 + 2\gamma x(\gamma x + 2) \ ;$$

elle permet d'étudier les triangles jouissant de la propriété indiquée que $b^4 + c^4 + h_a^4$ est le carré d'un nombre rationnel, pour des valeurs rationnelles de $\frac{h_a}{a}$ et de tang A. Les formules de réduction aux fonctions elliptiques sont:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \ , \qquad \pm y = \wp(u + v) - \wp u = x^2 + \beta - 2\wp u \ ,$$

$$\beta = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 1) \ ,$$

$$g_2 = 1 + 3\beta^2 \qquad = \frac{1}{3}(\gamma^4 - 2\gamma^2 + 4) > 0 \ ,$$

$$g_3 = -(1 + 2\beta + \beta^3) = -\frac{1}{27}(\gamma^6 - 3\gamma^4 + 21\gamma^2 + 8) < 0 \ ,$$

$$\Delta = -\gamma^2(\gamma^6 - 2\gamma^4 + 11\gamma^2 + 16) < 0 \ ;$$

v étant un argument constant défini par les équations concordantes:

$$\wp v = -\beta \ , \qquad \wp' v = \gamma \ , \qquad \wp'' v = \frac{1}{2}\gamma^2(\gamma^2 - 2) \ ,$$

$$\wp 2v = \frac{1}{48}(3\gamma^6 - 12\gamma^4 + 44\gamma^2 - 32) \ ,$$

$$\wp' 2v = -\frac{1}{32}\gamma(\gamma^8 - 6\gamma^6 + 28\gamma^4 - 56\gamma^2 + 64) \ ,$$

on obtient les solutions suivantes, relativement simples pour ce genre de questions, et qui peuvent être exprimées au moyen

d'un certain argument constant w:

$$\mathfrak{p}^{2w} = \frac{1}{3}(2\gamma^2 + 1)\,, \qquad \mathfrak{p}'^{2w} = -\gamma(1 + \gamma^2)\,,$$

$$\mathfrak{p}^{4w} = \frac{11\gamma^6 + 20\gamma^4 - 20\gamma^2 - 32}{48(\gamma^2 + 1)^2}\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w - \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 + 2)\,, \qquad \mathfrak{p}'\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma\,, \qquad \mathfrak{p}''\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma^2\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w + \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 - 4)\,, \qquad \mathfrak{p}'\left(w + \frac{v}{2}\right) = -\gamma\,, \qquad \mathfrak{p}'' = 2 - \gamma^2\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w - \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = -\frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 16}{\gamma^3}\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(w + \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 20\gamma^2 + 8}{6(\gamma^2 - 2)^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{2\gamma^4 - 3\gamma^2 + 8}{(2 - \gamma^2)^3}\,,$$

$$\mathfrak{p}(2w - v) = -\frac{1}{12}(\gamma^2 + 8)\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{1}{4}\gamma^3\,,$$

$$\mathfrak{p}(2w + v) = \frac{-\gamma^4 + 4\gamma^2 + 12}{12\gamma^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 8}{4\gamma^3}\,,$$

$$\mathfrak{p}(4w - 2v) = \frac{11\gamma^8 + 16\gamma^6 + 96\gamma^4 + 768\gamma^2 + 768}{48\gamma^6}\,,$$

$$\mathfrak{p}\left(3w - \frac{v}{2}\right) = \frac{\gamma^4 + 20\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}\,, \qquad \mathfrak{p}' = \frac{5\gamma^4 + 20\gamma^2 + 16}{\gamma^3}\,.$$

L'ÉQUATION $\mu y^2 = x^4 + a$.

7. — Soient a et μ deux nombres rationnels donnés et soit $(x_0 y_0)$ une solution primitive de l'équation indéterminée

$$\mu y^2 = x^4 + a\,.$$

Cette solution particulière peut être rejetée à l'infini par la transformation homographique

$$x = x_0 + \frac{\mu y_0^2}{X}\,, \qquad y = y_0 . Y\,,$$

qui transforme l'équation considérée en l'équation suivante de FERMAT:

$$(YX^2)^2 = X^4 + 4x_0^3 X^3 + 6\mu x_0^2 y_0^2 X + 4\mu^2 x_0 y_0^4 X + \mu^3 y_0^6\,.$$