Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1927)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT QUELCONQUE D'UNE SECTION CONIQUE

Autor: Gennimatas, N.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21260

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT QUELCONQUE D'UNE SECTION CONIQUE

PAR

N. GENNIMATAS (Athènes).

---

1. — En partant des équations paramétriques

$$x = a \cos v \ , \qquad y = b \sin v \tag{1}$$

de l'ellipse $(2a, 2b)$, rapportée à ses axes, on obtient pour le rayon de courbure à un point P (v) l'expression

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^{\frac{3}{2}}}{ab} ,$$

ou, en tenant compte des équations (1) :

$$R = \frac{(a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \tag{2}$$

Désignons par $F_1 (- c, o)$, $F_2 (c, o)$ les foyers et par P (x, y) un point quelconque de l'ellipse, on a

$$(F_1 P)^2 = r_1^2 = (x + c)^2 + y^2 \ , \qquad (F_2 P)^2 = r_2^2 = (x - c)^2 + y^2 \ ,$$

en même temps que

$$(r_1 + r_2)^2 = 4a^2 \ ;$$

d'où

$$r_1 r_2 = 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2$$

ou (comme $c^2 = a^2 - b^2$),

$$r_1 r_2 = a^2 + b^2 - x^2 - y^2 \ . \tag{3}$$

Ainsi, d'après (3), la formule (2) devient

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \tag{4}$$

2. — En se servant des fonctions hyperboliques on a pour l'hyperbole $(2a, 2b)$, rapportée à ses axes, les équations

$$x = a ch\varphi , \quad y = b sh\varphi , \tag{5}$$

et pour le rayon de courbure au point P (x, y) de la courbe

$$R = \frac{(a^2 sh^2\varphi + b^2 ch^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab} , \tag{6}$$

ou, en tenant compte des équations (5):

$$R = \frac{(x^2 + y^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} . \tag{7}$$

Mais si, comme dans le cas de l'ellipse, r_1 et r_2 représentent les distances E_1 P et E_2 P du point P de l'hyperbole aux foyers, on trouve aisément

$$r_1 r_2 = x^2 + y^2 - a^2 + b^2 . \tag{8}$$

Ainsi, d'après (8), la formule (7) devient

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} , \tag{9}$$

formule semblable à la formule (4).

3. — Pour le rayon de courbure au point P (x, y) de la parabole

$$y^2 = 2px \tag{10}$$

on a la formule

$$R = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{p}{2} + x\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} ,$$

ou, comme $\frac{p}{2} + x = r$, r représentant la distance du point de la parabole au foyer:

$$R = \frac{(2r)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}},$$

ou encore

$$R = \frac{(2r)^2}{\sqrt{2pr}}. \tag{11}$$

4. — Comme il est très facile de tracer la normale à un point quelconque d'une section conique, la construction du centre de courbure correspondant se réduirait à la construction d'un segment de longueur égale au rayon de courbure. Aussi bien pour l'ellipse que pour l'hyperbole on pourrait, en se servant de la formule

$$R = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

arriver aux constructions suivantes :

1. Soient r_1, r_2 les distances d'un point de l'ellipse $(2a, 2b)$ aux foyers. Après avoir tracé le cercle de diamètre $AA' = 2a$ (fig. 1), on porte sur la droite AA' les segments $AD = 1$ et $AP_1 = r_1$, $(A'P_1 = r_2)$, et sur la tangente en A les segments $AB = ab$ et $AP_2 = A'P_1 = r_2$; on mène du point P_1 la perpendiculaire d au diamètre AA': alors on aura $P_1S = \sqrt{r_1 r_2}$. On mène P_1C parallèle à DP_2 et on obtient ainsi $AC = r_1 r_2$; joignons B à S et C à E, point où la droite BS coupe le diamètre AA': le point T où la droite passant par C et E ren-

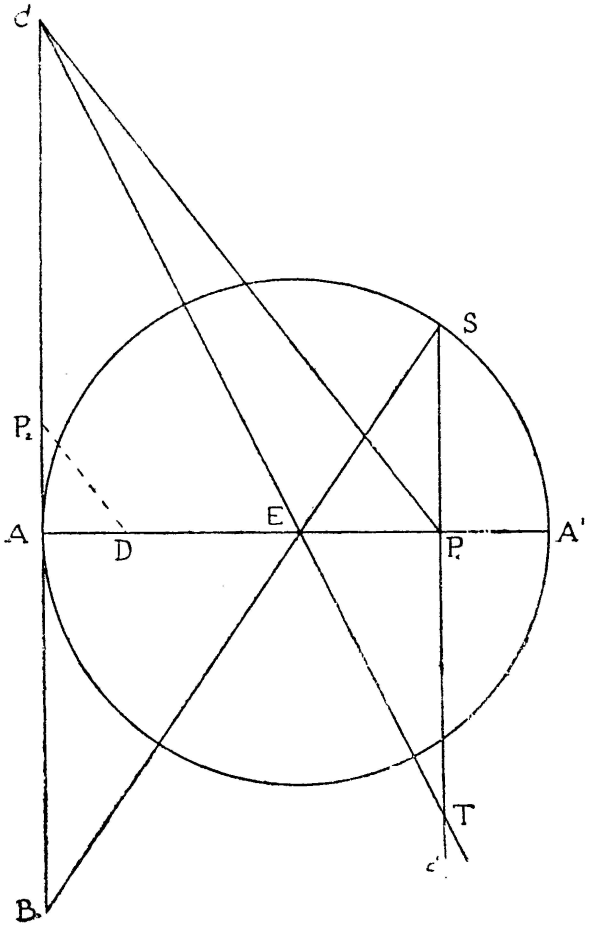

Fig. 1

contre la droite d nous donne le segment P_1T égal au rayon de courbure R correspondant au point considéré de l'ellipse. En effet, des deux paires de triangles semblables EP_1T, ACE et EP_1S, ABE on obtient

$$\frac{P_1T}{AC} = \frac{EP_1}{AE} = \frac{P_1S}{AB},$$

d'où

$$P_1T = AC \cdot \frac{P_1S}{AB} = r_1 r_2 \cdot \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{ab} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = R, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2. Soient r_1, r_2 les distances d'un point de l'hyperbole ($2a$, $2b$) aux foyers. Après avoir tracé le cercle de diamètre $AA' = 2a$

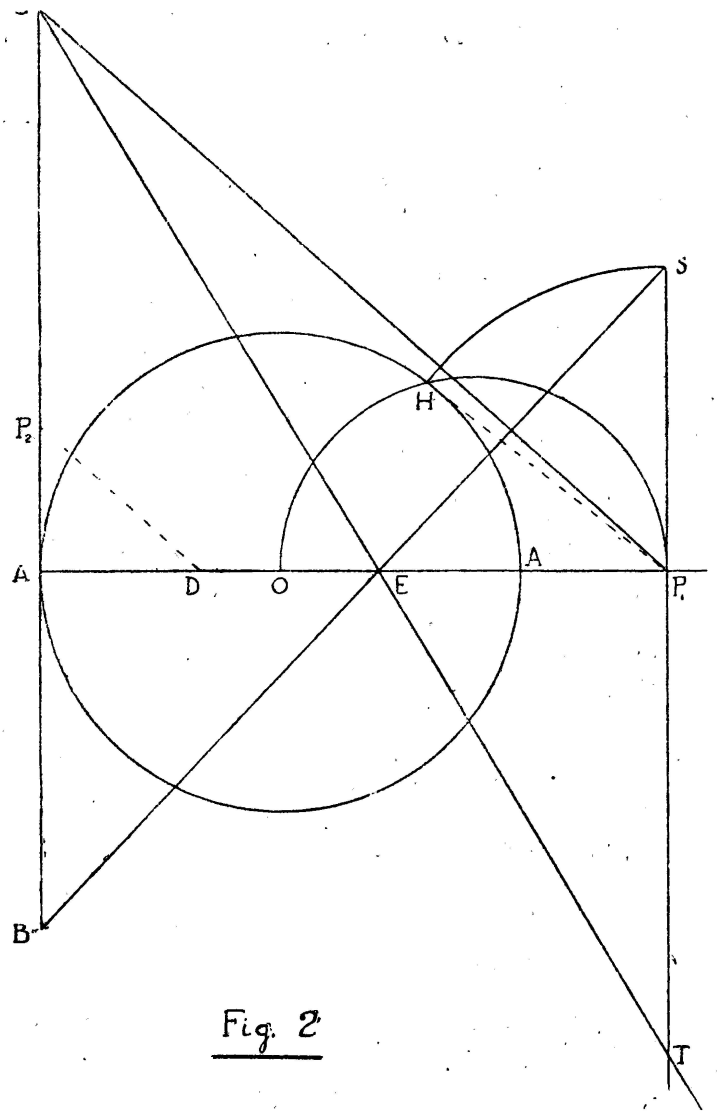

Fig. 2

(fig. 2), on porte sur la droite AA′ les segments $AD = 1$, $AP_1 = r_1$, ($A'P_1 = r_2$), et sur la tangente en A les segments $AB = ab$,

$AP_2 = r_2$. O étant le centre du cercle déjà tracé, soit H un des deux points communs à ce cercle et au cercle de diamètre OP_1; on a alors $P_1H = \sqrt{r_1 r_2}$. On porte ce segment sur la perpendiculaire d à la droite AA′, passant par P_1, de sorte qu'on ait $P_1S = P_1H$; on mène P_1C parallèle à DP_2 et on obtient ainsi $AC = r_1 r_2$. Joignons B à S et C à E, point où la droite BS coupe la droite AA′: le point T où la droite passant par C et E rencontre la droite d est tel qu'on a $P_1T = R$, ce qu'on reconnaît de la même manière comme au cas précédent.

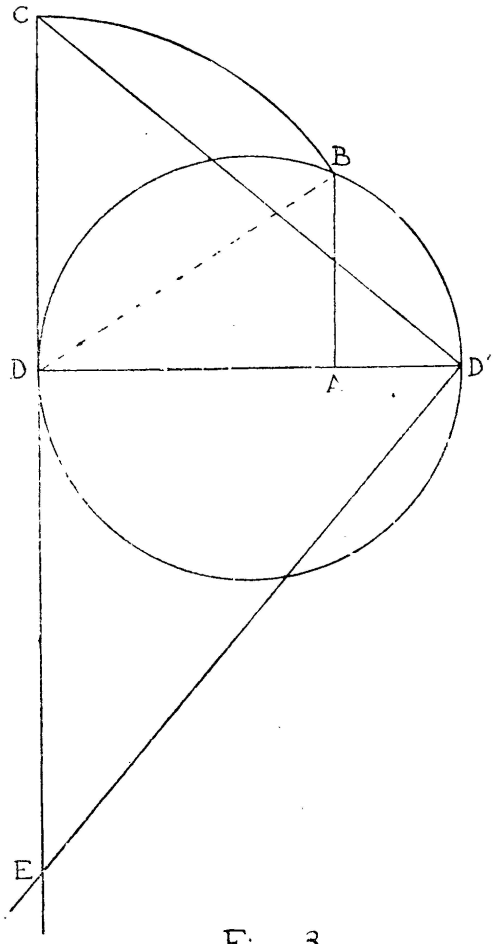

Fig. 3

3. Dans le cas de la parabole $y^2 = 2px$ on construit le segment dont la longueur égale le rayon de courbure R au point de la courbe à la distance r au foyer, en se servant de la formule (11), de la manière suivante : Après avoir tracé le cercle de diamètre $DD' = 2r$ sur lequel on porte le segment $DA = p$ (fig. 3), on aura la corde DB égale à $\sqrt{2pr}$. Si l'on porte DB sur la tangente en D de sorte qu'on ait DC = DB, en joignant C à D′ et menant D′E perpendiculaire à CD′, on obtient sur la tangente le point E tel qu'on ait DE = R, comme on le voit immédiatement.