Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: 10. — Droites se coupant en un même point.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21251

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Démonstration.

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, BC_1A_1 :$$
$$a_1 : c' = c'' : b_1 ;$$
$$\left\{\begin{array}{l} a_1 b_1 = c' c'' , \\ b_1 c_1 = a' a'' , \\ c_1 a_1 = b' b'' . \end{array}\right. \qquad (64)$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1° Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs:

THÉORÈME 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD \; ; \qquad \text{mais} \qquad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 \; ; \qquad \text{de même} \qquad BO \perp b_1 \qquad \text{et} \qquad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1, b_1, c_1 passent donc par O.

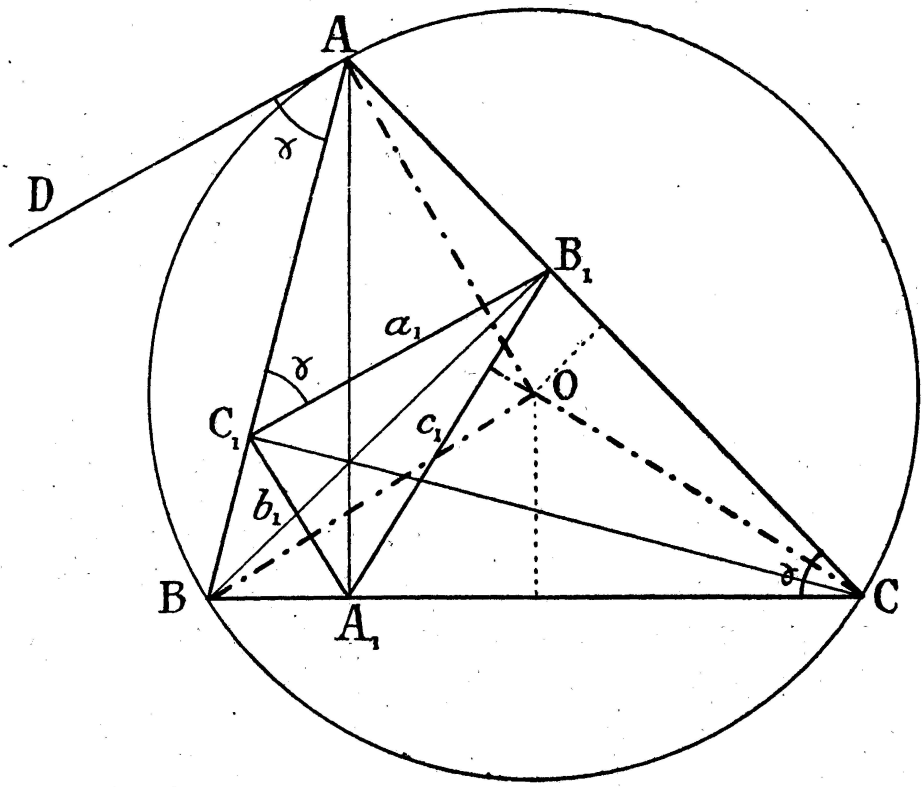

Fig. 15.

Remarque 1. — On peut aussi démontrer ce théorème en se basant sur la *réciproque du théorème de Ceva.*

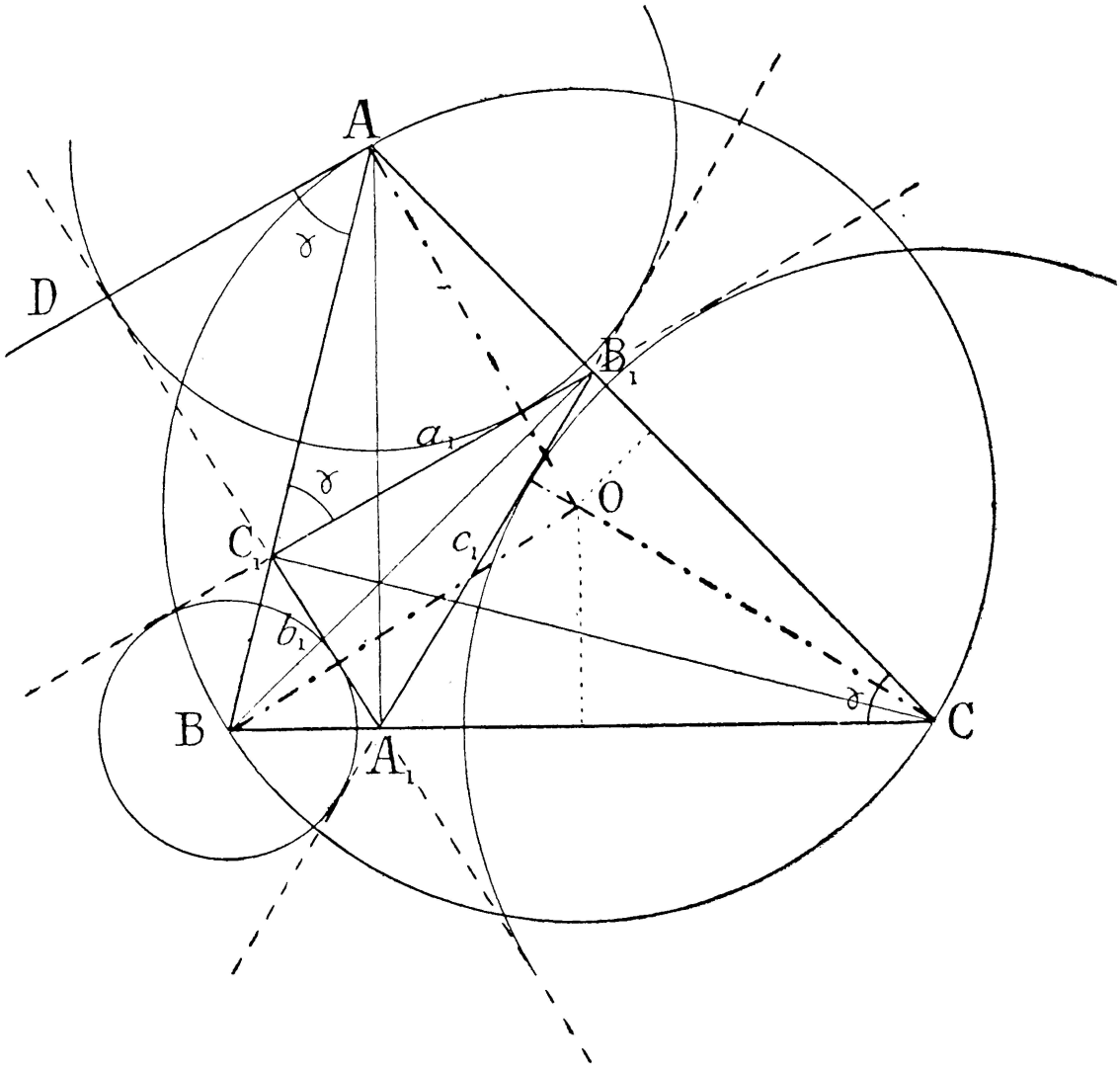

Fig. 16.

Remarque 2. — Les sommets du triangle donné (ABC) étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs ($A_1 B_1 C_1$), les perpendiculaires en question sont les rayons aboutissant aux points de contact des côtés (fig. 16). Le théorème ci-dessus peut donc aussi s'énoncer comme suit:

THÉORÈME 1'. — *Si l'on construit les cercles ex-inscrits à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *et les rayons aboutissant aux points de contact des côtés, les prolongements de ces trois rayons se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les centres* (A, B, C) *des cercles ex-inscrits* (fig. 16).

2° Abaissons, comme précédemment, de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle

des pieds des hauteurs et joignons les pieds aux sommets opposés de ce second triangle:

THÉORÈME 2. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne les pieds de ces perpendiculaires aux sommets opposés de ce dernier triangle, les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point* (fig. 17).

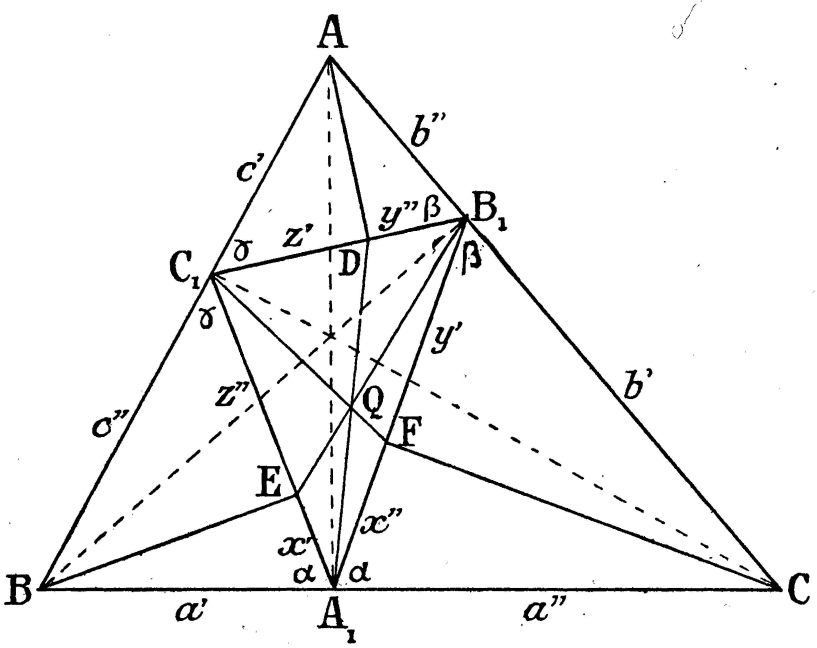

Fig. 17.

Démonstration.

$$x' = a' \cos \alpha \,, \qquad x'' = a'' \cos \alpha \,,$$
$$y' = b' \cos \beta \,, \qquad y'' = b'' \cos \beta \,,$$
$$z' = c' \cos \gamma \,, \qquad z'' = c'' \cos \gamma \,.$$

Mais

$$a' b' c' = a'' b'' c'' \text{ (Théorème de Ceva)} \,.$$

Donc

$$\underline{x' y' z' = x'' y'' z''} \,. \tag{65}$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites $A_1 D$, $B_1 E$ et $C_1 F$ se coupent en un même point Q. Ce point est le *cinquième point remarquable* du triangle des pieds des hauteurs.

Remarque. — De (55) $A_1 E = B_1 D$, $C_1 D = A_1 F$, $B_1 F = C_1 E$ résulte aussi $A_1 E \,.\, C_1 D \,.\, B_1 F = A_1 F \,.\, B_1 D \,.\, C_1 E$.

3° Menons les bissectrices des angles d'un triangle et joignons leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs aux sommets opposés de ce 2me triangle:

THÉORÈME 3. — *Si l'on mène les bissectrices des angles d'un triangle jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne ces points d'intersection aux sommets opposés du second triangle, les trois transversales ainsi obtenues se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient G, N et T les points d'intersection des bissectrices avec les côtés respectifs a_1, b_1, c_1 (fig. 18):

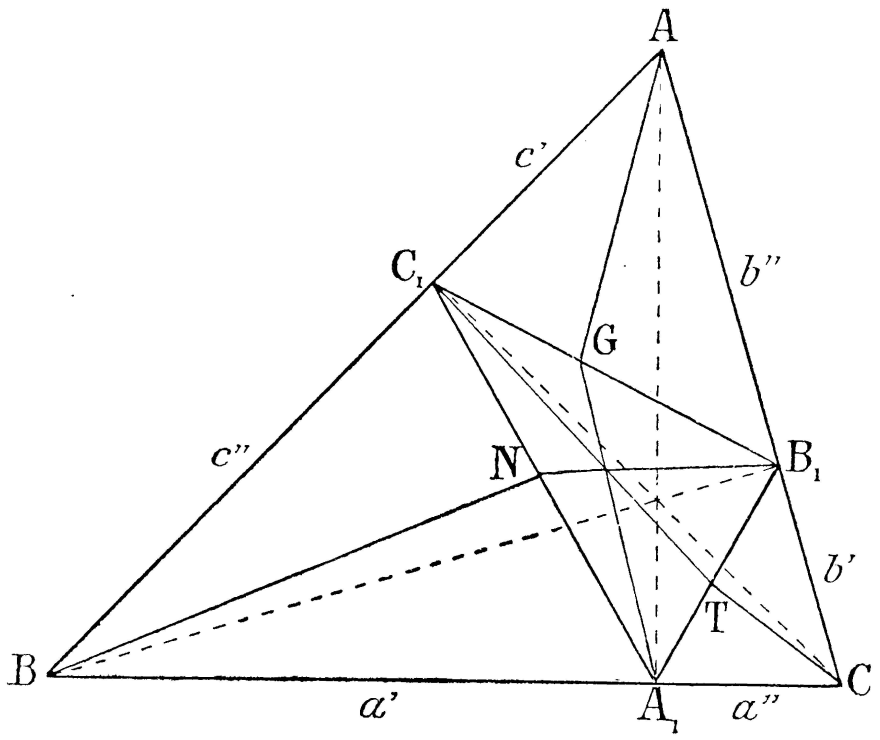

Fig. 18.

$$\Delta\, A_1 B_1 C \ldots A_1 T : B_1 T = a'' : b' ,$$

$$\Delta\, B_1 C_1 A \ldots B_1 G : C_1 G = b'' : c' ,$$

$$\Delta\, C_1 A_1 B \ldots C_1 N : A_1 N = c'' : a' ,$$

d'où

$$A_1 T \,.\, B_1 G \,.\, C_1 N : A_1 N \,.\, C_1 G \,.\, B_1 T = a'' b'' c'' : a' b' c' .$$

Mais

$$a' b' c' = a'' b'' c'' .$$

Par suite

$$\underline{A_1T \,.\, B_1G \,.\, C_1N = A_1N \,.\, C_1G \,.\, B_1T} \,. \qquad (66)$$

Remarque. — Ce théorème peut être *généralisé:* on peut remplacer les trois hauteurs du triangle donné par trois transversales quelconques AA′, BB′, CC′ issues des sommets et se coupant en un même point: en menant les bissectrices des angles A, B, C jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle A′ B′ C′ et en joignant ces points aux sommets opposés A′, B′, C′, on obtient trois droites se coupant en un même point. (La démonstration est exactement la même.)

4° Construisons les hauteurs A_1 D, B_1 E, C_1 F du triangle des pieds des hauteurs et joignons leurs pieds D, E, F aux sommets correspondants A, B, C du triangle donné (fig. 19):

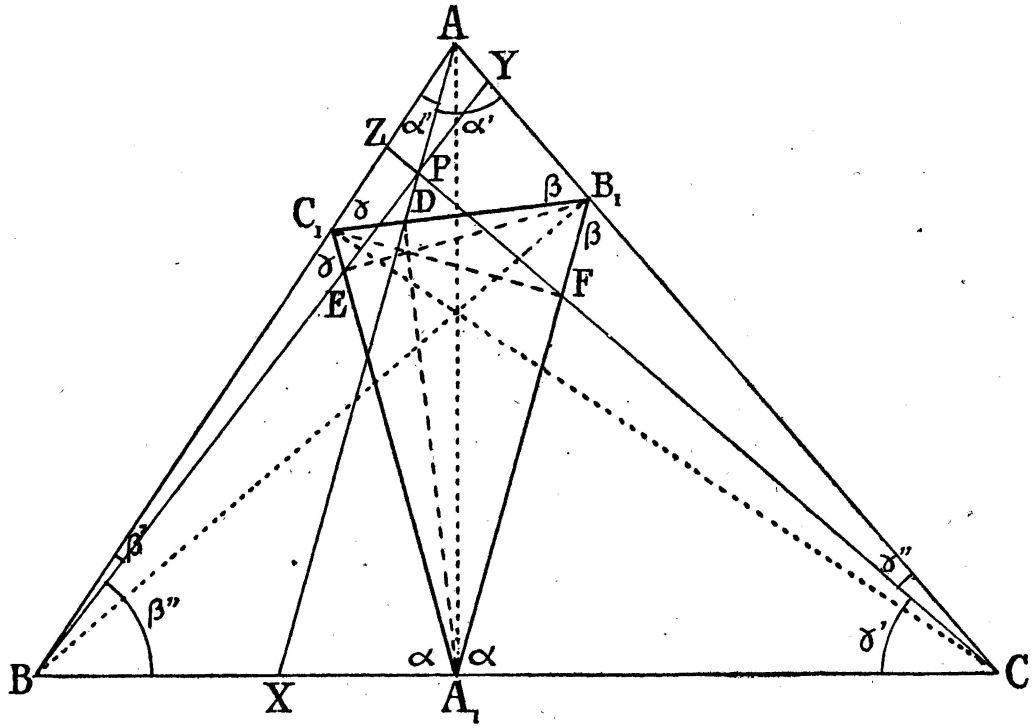

Fig. 19.

THÉORÈME 4. — *Les droites de jonction des sommets d'un triangle aux pieds des hauteurs correspondantes du triangle des pieds des hauteurs se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient X, Y, Z les points d'intersection de ces droites de jonction avec les côtés respectifs *a*, *b*, *c*. En appli-

quant le théorème du sinus aux six triangles

CFA_1, CFB_1, ADB_1, ADC_1, BEC_1, BEA_1, on obtient

$$1)\ A_1F : CF = \sin\gamma' : \sin\alpha\ ; \qquad 2)\ CF : B_1F = \sin\beta : \sin\gamma''\ ;$$

$$3)\ B_1D : AD = \sin\alpha' : \sin\beta\ ; \qquad 4)\ AD : C_1D = \sin\gamma : \sin\alpha''\ ;$$

$$5)\ C_1E : BE = \sin\beta' : \sin\gamma\ ; \qquad 6)\ BE : A_1E = \sin\alpha : \sin\beta''\ .$$

$$1).2) \ldots A_1F : B_1F = \sin\beta \sin\gamma' : \sin\alpha \sin\gamma''\ ,$$

$$3).4) \ldots B_1D : C_1D = \sin\gamma \sin\alpha' : \sin\beta \sin\alpha''\ ,$$

$$5).6) \ldots C_1E : A_1E = \sin\alpha \sin\beta' : \sin\gamma \sin\beta''\ ,$$

d'où

$$\alpha)\ A_1F . B_1D . C_1E : A_1E . C_1D . B_1F = \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' : \sin\alpha'' \sin\beta'' \sin\gamma''\ .$$

Appliqué aux six triangles CZA, CZB, AXB, AXC, BYC, BYA, le théorème du sinus donne

$$1)'\ AY : BY = \sin\beta' : \sin\alpha\ ; \qquad 2)'\ BY : CY = \sin\gamma : \sin\beta''\ ;$$

$$3)'\ CX : AX = \sin\alpha' : \sin\gamma\ ; \qquad 4)'\ AX : BX = \sin\beta : \sin\alpha''\ ;$$

$$5)'\ BZ : CZ = \sin\gamma' : \sin\beta\ ; \qquad 6)'\ CZ : AZ = \sin\alpha : \sin\gamma''\ .$$

$$1)'.2)' \ldots AY : CY = \sin\gamma \sin\beta' : \sin\alpha \sin\beta''\ ,$$

$$3)'.4)' \ldots CX : BX = \sin\beta \sin\alpha' : \sin\gamma \sin\alpha''\ ,$$

$$5)'.6)' \ldots BZ : AZ = \sin\alpha \sin\gamma' : \sin\beta \sin\gamma''\ ,$$

d'où

$$\beta)\ AY . CX . BZ : AZ . BX . CY = \sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma' : \sin\alpha'' \sin\beta'' \sin\gamma''\ .$$

De α) et β) résulte

$$AY . CX . BZ : AZ . BX . CY = A_1F . B_1D . C_1E : A_1E . C^1D . B_1F = 1\ ,$$

car, d'après le théorème de Ceva appliqué aux hauteurs A_1D, B_1E et C_1F:

$$A_1F . B_1D . C_1E = A_1E . C_1D . B_1F\ .$$

Donc

$$\underline{AZ . BX . CY = AY . CX . BZ\ .} \qquad (67)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites AX, BY, CZ se coupent en un même point P.