XII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Pour les structures simples en particulier, le groupe complexe et le groupe réel unitaire s'engendrent complètement au moyen de leurs transformations infinitésimales, tandis qu'il n'en est plus de même en général pour les groupes réels non unitaires. Il est vrai que toute transformation finie peut être regardée comme le produit d'un certain nombre de transformations admettant chacune une transformation infinitésimale génératrice, mais on ne sait pas *a priori* si ce nombre est borné. Or l'existence des espaces $\mathcal{E}$ à courbure négative nous donne à cet égard un renseignement précis et très simple.

Soit en effet G un groupe réel non unitaire et $\mathcal{E}$ l'espace à courbure négative dont G est le groupe des déplacements. Fixons un point O de l'espace. Parmi les déplacements de l'espace nous distinguerons les rotations autour de O et les *transvections :* je désigne sous ce nom un déplacement dans lequel une géodésique glisse sur elle-même, les vecteurs issus de ses points se transportant parallèlement à eux-mêmes au sens de Levi-Civita ; la géodésique considérée sera dite la *base* de la transvection. Cela posé tout déplacement peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une rotation autour de O et une transvection ayant pour base une géodésique passant par O. Or chacun de ces déplacements composants admet un déplacement infinitésimal générateur (rotation ou transvection infinitésimale). Par suite toute transformation finie de G peut être décomposée d'une manière et d'une seule en deux transformations admettant chacune une transformation infinitésimale génératrice. Par exemple toute substitution linéaire unimodulaire réelle peut être décomposée d'une manière et d'une seule en une substitution orthogonale et une substitution symétrique positive (c'est-à-dire dont l'équation *séculaire* ait toutes ses racines réelles et positives).

XII

Le second problème que je voulais signaler est le suivant. J'ai dit qu'à une structure (infinitésimale) donnée correspondent une infinité de groupes G, mais qui sont tous isomorphes entre eux. Cela n'est pas absolument exact si l'on considère le domaine

entier d'existence de ces groupes; il se peut qu'à une transformation de l'un correspondent plusieurs transformations et même une infinité de transformations de l'autre. C'est ainsi qu'à une transformation homographique réelle à une variable correspondent deux substitutions linéaires unimodulaires à deux variables. On peut toujours en tout cas imaginer un groupe abstrait G′ tel qu'à toute transformation de G′ corresponde une transformation et une seule de l'un quelconque des groupes G, à une transformation de ce groupe G pouvant correspondre plusieurs transformations de G′. Ce groupe G′ a un domaine simplement connexe, c'est-à-dire que tout contour fermé y est réductible à zéro par déformation continue. Tout groupe G qui a un isomorphisme non absolument holoédrique avec G′ n'est pas simplement connexe, et le nombre des contours fermés irréductibles entre eux par déformation continue dans le domaine de G est égal au nombre des transformations de G′ qui correspondent à la transformation identique de G; ce nombre peut être fini ou infini; les transformations en question de G′ engendrent un groupe discontinu qu'on peut appeler le groupe de connexion de G.

H. Weyl a démontré [1] que tout groupe simple réel unitaire a un groupe de connexion fini, et on peut ajouter qu'il existe toujours un groupe linéaire simplement connexe de la structure réelle unitaire considérée. En fait on connaît les groupes de connexion des groupes simples réels unitaires. Mais la méthode par laquelle Weyl a obtenu ce résultat fondamental ne s'applique pas aux formes réelles non unitaires des groupes simples, par exemple au groupe homographique réel, au groupe linéaire réel d'une forme quadratique indéfinie, etc. Les espaces $\mathcal{E}$ à courbure négative attachés aux groupes réels non unitaires nous fournissent au contraire une méthode immédiate pour résoudre le problème. En effet soit G le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$. Chaque transformation de G se décompose d'une manière et d'une seule en une rotation autour d'un point fixe O et une transvection amenant O en un certain point A, transvection complètement déterminée par le point A. Il en résulte que tout

[1] *Math. Zeitschr.*, 24, 1925, p. 380.

contour fermé dans le domaine du groupe G se ramène à deux contours fermés: l'un dans le domaine du groupe des rotations, ou groupe d'isotropie, l'autre dans le domaine des transvections, c'est-à-dire en définitive dans l'espace $\mathcal{E}$. L'espace $\mathcal{E}$ étant simplement connexe, le second contour fermé est réductible à zéro. Il en résulte que deux contours fermés du domaine du groupe total G seront réductibles ou non l'un à l'autre si les contours fermés correspondants du domaine du groupe d'isotropie le sont. Autrement dit le groupe de connexion de G est identique à celui du groupe d'isotropie. Et comme ce dernier est un groupe linéaire unitaire, ou se décompose en groupes unitaires, et, dans certains cas, un groupe à un paramètre isomorphe au groupe des rotations du plan, on connaît facilement son groupe de connexion, de sorte que le problème proposé est résolu. La conclusion générale est la suivante. Le groupe de connexion de tout groupe simple réel non unitaire, ou bien est formé d'un nombre fini d'opérations, ou bien se décompose en un groupe fini et un groupe cyclique d'ordre infini.

Je signalerai seulement un résultat curieux. Le groupe de connexion du groupe homographique réel d'une variable est infini, tandis qu'il est fini pour le groupe homographique de plusieurs variables.

Dans tous les cas du reste on peut effectivement construire, pour une forme réelle non unitaire donnée d'une structure simple, un groupe simplement connexe G'; seulement ce groupe n'est pas nécessairement linéaire, comme dans le cas des formes unitaires. Dans le cas du groupe homographique réel d'une variable, le groupe simplement connexe G' est par exemple donné par la formule

$$\operatorname{tg} x' = \frac{a \operatorname{tg} x + b}{a' \operatorname{tg} x + b'} .$$

A la transformation homographique identique ($a = b' = 1$, $a' = b = 0$) correspondent les transformations en nombre infini

$$x' = x + n\pi \qquad (n \text{ entier}) .$$

La méthode précédente s'applique aussi au groupe simple *complexe*, qui a du reste le même groupe de connexion que le groupe réel unitaire.