Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE
Autor: Cartan, E.
Kapitel: XIII
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21253

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

XIII

Les espaces $\mathcal{E}$ dont je viens de parler sont des espaces de Klein, admettant pour groupe fondamental le groupe de leurs déplacements. L'existence de ces espaces montre que toute Géométrie de Klein à groupe fondamental simple devient riemannienne par un choix convenable de l'élément générateur de l'espace; le choix est essentiellement unique [1] si le groupe fondamental est *complexe*, ou *réel non unitaire;* il est multiple si le groupe fondamental est *réel unitaire* [2]. Ce résultat s'étend évidemment à un groupe semi-simple. Si on veut bien remarquer que les Géométries de Klein les plus importantes sont celles dont les groupes fondamentaux sont simples ou semi-simples (Géométries projective, affine, conforme, de Laguerre, d'Hermite, etc.), on arrive à cette conclusion inattendue que la Géométrie riemannienne (à ds^2 défini) occupe une place tout à fait privilégiée. Partis, au début de cette conférence, de l'antagonisme entre les Géométries de Klein et la Géométrie riemannienne générale, nous arrivons, après un long détour, à cette constatation que c'est sous la forme riemannienne que ces Géométries de Klein, ou du moins les plus importantes d'entre elles, montrent le mieux leurs propriétés fondamentales. Il y aurait beaucoup à dire sur ce côté géométrique de la question [3]. Je me contenterai d'en signaler un aspect intéressant.

On sait l'importance du principe de dualité en Géométrie projective; or ce principe n'apparaît pas du tout si l'on se borne

---

[1] Cela signifie que si l'on a deux systèmes d'éléments générateurs rendant la Géométrie riemannienne, on peut établir entre les éléments des deux systèmes une correspondance biunivoque telle que deux éléments correspondants soient invariants par le même sous-groupe du groupe fondamental; au fond, c'est ce sous-groupe qui, suivant les idées de Klein et de Poincaré, définit le « point » de l'espace.

[2] Dans ce dernier cas, il peut en outre se présenter des formes riemanniennes *avec torsion*, la courbure et la torsion étant encore conservées par le transport parallèle.

[3] En Arithmétique et dans la Théorie des fonctions, l'existence de ces formes riemanniennes joue un rôle important. C'est ainsi que H. Poincaré fait reposer la possibilité d'une théorie générale des groupes hyperfuchsiens *discontinus* sur la forme riemannienne qu'on peut donner à la Géométrie d'une forme d'Hermite indéfinie (*C. R.*, 98, 1884, p. 503-503), de même que la théorie des groupes fuchsiens et celle des groupes kleinéens reposent sur les Géométries non-euclidiennes à 2 et à 3 dimensions, formes riemanniennes des Géométries projectives de la droite réelle et de la droite complexe.

à la partie *continue* du groupe fondamental de cette Géométrie, à savoir le groupe des homographies: le groupe fondamental complet est formé des homographies et des corrélations. Dans toute Géométrie de Klein, à groupe fondamental continu donné, il sera du plus haut intérêt de savoir si ce groupe continu n'est pas à compléter par d'autres familles de transformations analogues aux corrélations de l'espace projectif. Or c'est là un problème que nos connaissances actuelles sur les groupes unitaires nous permettent de résoudre complètement toutes les fois que le groupe fondamental est simple ou semi-simple. Je signalerai simplement ce résultat assez curieux, c'est que, dans la Géométrie cayleyenne à 7 dimensions dont l'absolu est une quadrique de la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0 \ ,$$

le groupe des déplacements proprements dits se complète par 23 autres familles de transformations.

J'espère vous avoir montré toute la variété des problèmes que la Théorie des groupes et la Géométrie, en s'appuyant mutuellement l'une sur l'autre, permettent d'aborder et de résoudre. Il y a encore là un champ de recherches à peine exploré et qui promet des résultats très intéressants.