Équation de Pfaff et forme quadratique particulière. Conclusion.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

on voit que l'on a ici

$$\chi^* \equiv {}^*\omega^2 + \chi_0^* \qquad {}^*\omega \equiv \sqrt{Q}\,\omega$$

et la forme $^*\omega$ n'est pas normale au sens du n° 22, ni même normée intrinsèquement, mais seulement par rapport à la forme χ; on devrait naturellement employer un autre facteur normant pour χ dans le cas μ = constante.

Equation de Pfaff et forme quadratique particulière. Conclusion.

29. — Envisageons enfin le problème de la conservation simultanée de l'équation

$$\omega \equiv A\,du + B\,dv = 0 \qquad C = \frac{A}{B} = e^c \tag{34}$$

et de la forme quadratique

$$\chi_0 \equiv 2M_0\,du\,dv \qquad M_0 = e^{m_0} \tag{77}$$

On obtient les conditions

$$\delta c = \xi' - \eta' \qquad \delta m_0 = \xi' + \eta' \qquad [\text{VI}, 0]$$

ou, en posant

$$m_0 + c = 2z \qquad m_0 - c = 2w$$

$$\delta z = \xi' \qquad \delta w = \eta' \qquad [\text{VI}, 0']$$

conditions analogues à celles obtenues pour la conservation de la forme

$$\tilde{\omega} \equiv \tilde{A}\,du + \tilde{B}\,dv \qquad \tilde{A} = \sqrt{\frac{A}{B}M_0} \qquad \tilde{B} = \sqrt{\frac{B}{A}M_0} \tag{78}$$

On utilise donc ici un facteur normant d'ordre zéro

$$H = \sqrt{\frac{M_0}{AB}} \tag{79}$$

et l'on peut aussi rattacher aux formes $\tilde{\omega}$ et χ_0 la forme quadratique

$$\tilde{\chi} \equiv \tilde{\omega}^2 - \chi_0$$

dont l'invariant $\tilde{\mu}$ d'ordre zéro est nul.

30. — *Conclusions générales.* — Nous avons, au cours des paragraphes précédents, traité un certain nombre de cas séparés; le procédé de recherche des invariants: invariants *distincts* des divers ordres, invariants *essentiels* et paramètres différentiels, a été assez uniforme pour qu'on puisse traiter de même les cas qui se présenteraient, par exemple, pour des formes ou équations de Monge de degré supérieur au second. Il n'est pas plus difficile, dans chaque cas, de rechercher les conditions suffisantes d'équivalence, ou, comme nous l'avons dit, les invariants *suffisants*, c'est-à-dire ceux qui assurent la conservation des formes ou équations en jeu, pour les transformations Σ. Mais les divers exemples traités montrent qu'une recherche particulière est nécessaire pour chaque cas envisagé, si l'on veut traiter intrinsèquement chacun de ces cas, sans profiter des résultats acquis dans des études voisines. Nous avons vu d'ailleurs que l'utilisation de tels résultats entraîne des détours dans la formation des invariants, et peut mener à des choix différents d'invariants essentiels, de paramètres différentiels, de conditions suffisantes, de facteurs normants.

Dans une étude générale des transformations Σ, c'est surtout le rôle des invariants et comitants relatifs (Σ_1), (Σ_2) et (Σ), ainsi que des invariants brisés, qui reste primordial; deux invariants relatifs r_1 et r_2, respectivement (Σ_1) et (Σ_2), de poids (-1), permettant toujours la formation de deux paramètres différentiels $\frac{f_{10}}{r_1}$ et $\frac{f_{01}}{r_2}$, on passera de ceux-ci à d'autres paramètres différentiels $\frac{f_{10}}{R_1}$ et $\frac{f_{01}}{R_2}$, préférables ailleurs, par le moyen des invariants $\frac{r_1}{R_1}$ et $\frac{r_2}{R_2}$. De même à partir d'un facteur normant J (invariant de la *forme* ϖ, par exemple) on déduira un autre facteur normant I au moyen d'un invariant $\frac{R}{r}$, R et r étant invariants relatifs (Σ) de même poids.

31. — Le cas indiqué au n° 29 a donné l'exemple d'un invariant relatif M_0, de poids (-1) et d'ordre nul, donc aussitôt atteint, qui fournissait pour une équation de Pfaff un facteur normant d'ordre zéro. Supposons que l'on ajoute ainsi à des conditions

imposées la conservation d'une forme quadratique χ_0; des invariants ainsi formés, certains seront propres à cette forme, d'autres propres aux autres conditions imposées, d'autres mixtes. Pour se débarrasser de la forme χ_0 introduite et revenir aux conditions initialement posées, ou complétées par d'autres, il suffira de la substitution, à M_0 et aux expressions analogues, d'invariants relatifs propres aux nouvelles conditions; de sorte que l'adjonction de la forme χ_0 donnera pour les conditions distinctes, sinon des invariants (absolus ou relatifs) propres à ces conditions du moins des expressions qui, par l'élimination des facteurs étrangers, constitueront ces invariants. Pour préciser par un exemple, revenons à la représentation conforme, où $du = 0$ et $dv = 0$ seraient les équations des lignes minima du plan ou des surfaces; la forme χ_0 étant considérée comme un ds^2, sa conservation mène à un problème d'applicabilité, où l'on peut utiliser les paramètres différentiels de la théorie des surfaces (courbes ou développables): certains invariants du dernier problème seront encore des invariants du problème initial; des combinaisons des autres permettront de trouver les autres invariants cherchés.

Il n'y a du reste là que l'application d'un principe général: les invariants d'un sous-groupe des transformations Σ étant connus, ils comprennent les invariants (Σ), et peuvent aussi par suite être utilisés à la formation des invariants d'un nouveau sous-groupe.

Remarquons à ce sujet que les invariants relatifs (Σ_1) et (Σ_2) sont des invariants absolus respectivement pour les transformations $\xi' = 0$, ou $\eta' = 0$; les invariants relatifs (Σ) et les invariants brisés sont invariants absolus respectivement pour les transformations $\xi' + \eta' = 0$, ou $\xi' - \eta' = 0$, c'est-à-dire $\xi = \pm \eta$ = constante. Tous ces invariants en particulier sont invariants absolus des transformations $\xi' = \eta' = 0$, soit $\xi = K_1$, $\eta = K_2$, K_1 et K_2 étant deux constantes. Le rôle que nous avons fait jouer à ces expressions est donc bien en accord avec le principe général énoncé.

Le Hâvre, le 23 avril 1928.