ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES SURFACES RÉGLÉES

Autor(en): **Deaux, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21882

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES SURFACES RÉGLÉES

PAR

R. DEAUX (Mons, Belgique).

A cause des notations, nous reprendrons les résultats intéressants exposés par M. L'ABBÉ E. LAINÉ dans l'*Enseignement mathématique*, 25me année, p. 63, 1926.

1. — *Equation de la surface.* Une surface réglée (Σ) est définie par la trajectoire (m) d'un point M de la droite génératrice g et par la direction de g pour chaque position de M. Si donc $\bar{E}$, $\bar{e}$, $\bar{u}$, λ sont respectivement la coordonnée vectorielle d'un point N de g, la coordonnée de M, un vecteur unitaire porté par g et la valeur algébrique du segment M N estimée sur l'axe orienté défini par $\bar{u}$, l'équation de (Σ) est

$$\bar{E} = \bar{e} + \lambda \bar{u} . \tag{1}$$

Les vecteurs $\bar{e}$ et $\bar{u}$ sont des fonctions d'un paramètre t. On a

$$(\bar{u})^2 = 1 , \qquad \bar{u}\, d\bar{u} = 0 . \tag{2}$$

Si $\bar{u}$ est constant, (Σ) est un cylindre. Si $\bar{e}$ est constant, (Σ) est un cône.

2. — *Normale en N.* Si λ est une fonction de t, le point N décrit sur (Σ) une courbe (n) dont la tangente en N a la direction du vecteur

$$d\bar{E} = d\bar{e} + \lambda\, d\bar{u} + \bar{u}\, d\lambda . \tag{3}$$

La normale en N à (Σ) a donc la direction du vecteur [1]

$$\mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{E} = \mathfrak{M}\bar{u}\,(d\bar{e} + \lambda\, d\bar{u}) \tag{4}$$

ou

$$\mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{e} + \lambda\, \mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{u}\ . \tag{5}$$

En particulier la normale en M a pour direction celle du vecteur

$$\mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{e}$$

et, si le point N s'éloigne indéfiniment sur g, la direction limite de la normale est celle de

$$\mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{u}\ ,$$

comme on le voit en divisant le vecteur (5) par λ.

Lorsque (Σ) est un cône de sommet M, le vecteur (4) est nul si $\lambda = 0$ et constant en direction si $\lambda \neq 0$: le plan tangent est indéterminé au sommet et est le même en tous les autres points de g. Lorsque (Σ) est un cylindre, le vecteur (4) est constant si λ est fini, et indéterminé si $|\lambda|$ croît indéfiniment: le plan tangent est indéterminé au point à l'infini de g et est le même en tous les autres points de g.

3. — *Surface développable.* La surface (Σ) est développable si, pour une génératrice g quelconque, la normale en un point N, variable sur g, a une direction constante. Il faut et il suffit que les vecteurs

$$\mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{e}\ , \qquad \mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{u} \tag{6}$$

soient parallèles, donc que les vecteurs $\bar{u}$, $d\bar{e}$, $d\bar{u}$ soient parallèles à un même plan, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$d\bar{e}\, \mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{u} = 0\ . \tag{7}$$

Dans le cas du cylindre on a identiquement $d\bar{u} = 0$.

4. — *Arête de rebroussement.* Si la relation (7) a lieu, les vecteurs (6) sont parallèles. Il est donc possible de déterminer

[1] Nous employons les notations de MASSAU. $\bar{a}\bar{b}$ et $\mathfrak{M}\bar{a}\bar{b}$ sont respectivement les produits scalaire et vectoriel des vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$. Voir F. BOUNY, *Leçons de Mécanique rationnelle*, tome I.

λ pour que le vecteur (5) ou (4) soit nul. Il faut que

$$d\bar{e} + \lambda d\bar{u} = k\bar{u} \ , \tag{8}$$

k étant une fonction inconnue de t. Multiplions les deux membres de (8) par $d\bar{u}$. Il vient, en tenant compte de (2),

$$\lambda = -\frac{d\bar{e}\, d\bar{u}}{(d\bar{u})^2} \ . \tag{9}$$

Soit R le point de g dont le λ a la valeur (9). En ce point, le vecteur (4) étant nul, les vecteurs $\bar{u}$ et $d\overline{E}$ sont parallèles. Donc la génératrice g y touche la trajectoire (r) du point R, arête de rebroussement de la développable (Σ) et le plan tangent à (Σ) en R est indéterminé.

5. — *Surface gauche.* Si la relation (7) n'est pas une identité, la surface (Σ) est gauche. En vertu du n° 2 le plan asymptote est normal au vecteur

$$\mathfrak{M}\bar{u}\, d\bar{u}$$

et, par suite, le plan central est normal au vecteur

$$d\bar{u} \ .$$

La tangente au lieu du point central, O, étant normale à $d\bar{u}$, on doit avoir, en vertu de (3) et (2)

$$d\bar{u}(d\bar{e} + \lambda d\bar{u}) = 0$$

et le λ du point O est

$$\lambda = -\frac{d\bar{e}\, d\bar{u}}{(d\bar{u})^2} \ . \tag{10}$$

La ligne de striction est donc donnée, comme l'a fait remarquer M. L'ABBÉ E. LAINÉ, par la même équation que l'arête de rebroussement dans le cas de la surface développable.

Aux valeurs de t, solutions de l'équation (7), correspondent *des génératrices singulières* de la surface gauche. Sur chacune d'elles le plan tangent est unique (n° 3) sauf en un point R (n° 4) situé sur la ligne de striction, où il est indéterminé.

6. — *Signe d'un angle.* Soit $\overline{AB}$ un vecteur dont l'origine est dans un plan π et qui est normal à ce plan. Un observateur se place sur $\overline{AB}$, la tête vers B, regarde π et adopte comme sens positif des angles de ce plan le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire celui des rotations positives autour de $\overline{AB}$.

Soient $\bar{a}$, $\bar{b}$ deux vecteurs dans le plan π, $(\bar{a}, \bar{b})$ leur angle apprécié relativement à un vecteur unitaire $\bar{u}$ normal au plan, a, b les modules des vecteurs $\bar{a}$, $\bar{b}$. On a, en grandeur et en signe,

$$\sin(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{u}\,\mathfrak{M}\,\bar{a}\,\bar{b}}{ab}, \tag{11}$$

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{u}\,\mathfrak{M}\,\bar{a}\,\bar{b}}{\bar{a}\bar{b}}, \tag{13}$$

$tg\,(\bar{a}, \bar{b})$ ne change pas si on remplace l'un des vecteurs ou les deux par leurs opposés.

7. — *Formule d'expulsion.* On sait que

$$\mathfrak{M}\,\bar{a}\,\mathfrak{M}\,\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\bar{b})\,\bar{c}\,. \tag{14}$$

8. — *Paramètre de distribution.* Nous excluons le cas du cylindre et des génératrices singulières cylindriques.

Soient ω et ν les plans tangents en O et N à la surface (Σ). On a, pour l'observateur placé suivant $\bar{u}$ sur g (nos 6, 2)

$$\operatorname{tg}(\omega\nu) = \operatorname{tg}[d\bar{u}\,,\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,(d\bar{e} + \lambda\,d\bar{u})]$$

$$\operatorname{tg}(\omega\nu) = \frac{\bar{u}\,\mathfrak{M}\,d\bar{u}\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,(d\bar{e} + \lambda\,d\bar{u})}{d\bar{u}\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,d\bar{e}},$$

ou, en vertu de (14),

$$\operatorname{tg}(\omega\nu) = \frac{d\bar{u}\,d\bar{e} + \lambda\,(d\bar{u})^2}{d\bar{u}\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,d\bar{e}}.$$

En vertu de (10),

$$\mathrm{ON} = \lambda + \frac{d\bar{u}\,d\bar{e}}{(d\bar{u})^2}.$$

Donc le nombre

$$p = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{tg}\,(\omega\nu)} = -\frac{d\bar{e}\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,d\bar{u}}{(d\bar{u})^2} \tag{15}$$

est indépendant du point N et du sens de $\bar{u}$: c'est le paramètre de distribution des plans tangents pour la génératrice g. La rotation du plan tangent autour de g orientée arbitrairement se fait positivement ou négativement suivant que p est positif ou négatif et g est alors dextrorsum ou sinistrorsum.

Soient $\bar{e} + \Delta\bar{e}$ la coordonnée d'un point M′ voisin de M sur (m); $\bar{u} + \Delta\bar{u}$ le vecteur unitaire porté par la génératrice g' issue de M′; O_1, O_2 les pieds sur g et g' de la perpendiculaire commune à ces droites; (gg') l'angle $(\bar{u}, \bar{u} + \Delta\bar{u})$ apprécié relativement à un vecteur unitaire $\bar{u}'$ porté par cette perpendiculaire; $O_1\,O_2$ la valeur algébrique de la plus courte distance estimée sur $\bar{u}'$. On a

$$\begin{aligned} O_1O_2 &= \bar{u}'\Delta\bar{e}\,, \\ \bar{u}'\sin(gg') &= \mathfrak{M}\bar{u}(\bar{u} + \Delta\bar{u}) = \mathfrak{M}\bar{u}\Delta\bar{u}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Donc

$$\frac{O_1O_2}{\sin(gg')} = \frac{\Delta\bar{e}\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,\Delta\bar{u}}{\sin^2(gg')}$$

Mais, de (16) on tire

$$\sin^2(gg') = (\mathfrak{M}\,\bar{u}\,\Delta\bar{u})^2 = (\Delta\bar{u})^2 - (\bar{u}\,\Delta\bar{u})^2\,.$$

Par suite, si g' se rapproche indéfiniment de g, on a

$$\lim \frac{O_1O_2}{\sin(gg')} = \frac{d\bar{e}\,\mathfrak{M}\,\bar{u}\,d\bar{u}}{(d\bar{u})^2}$$

et, en grandeur et en signe, quel que soit le sens du vecteur $\bar{u}'$ choisi sur O_1O_2,

$$p = -\lim \frac{O_1O_2}{\sin(gg')}\,.^{1} \tag{17}$$

9. — *Trajectoires orthogonales des génératrices.* Le point N décrit une telle courbe si

$$\bar{u}\,d\bar{\mathrm{E}} = 0$$

---

[1] DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, troisième partie, p. 302.
C. SERVAIS, *Sur les surfaces réglées*, Nos 1, 2 (*Annaes da Academia polytechnica do Porto*, 1919, tomo XIII). Ces géomètres opposent les sens positifs des angles et des rotations. Les seconds membres des formules (15) et (17) y sont donc changés de signe.

ou, en vertu de (3), si

$$d\lambda = -\bar{u}\, d\bar{e} \ .$$

Les trajectoires sont données par

$$\lambda = -\int \bar{u}\, d\bar{e} + \text{constante} \ .$$

10. — *Cône directeur.* La parallèle à g issue de l'origine des coordonnées engendre le cône directeur de (Σ). L'extrémité du vecteur $\bar{u}$ localisé en ce point décrit une courbe sphérique (g).

Soient s, σ les arcs des courbes (m), (g) et $\bar{u}_m$, $\bar{u}_g$ les vecteurs unitaires portés par les tangentes positives à ces courbes. On a

$$\frac{d\bar{e}}{ds} = \bar{u}_m \ , \quad \frac{d\bar{u}}{d\sigma} = \bar{u}_g \ , \quad \bar{u}\,\bar{u}_g = 0 \ .$$

Donc, en vertu de (15),

$$p = \frac{ds}{d\sigma}\, \bar{u}\, \mathfrak{M}\, \bar{u}_m \bar{u}_g \ . \tag{18}$$

11. — *Cas où* (m) *est une trajectoire orthogonale.* On a

$$\bar{u}\bar{u}_m = 0 \ .$$

On désigne par V l'angle $(\bar{u}_m, \bar{u}_g)$ apprécié autour de $\bar{u}$ et (18) s'écrit, en vertu de (11),

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \sin V \ . \tag{19}$$

V est l'angle que fait le plan asymptote relatif à g avec le plan tangent μ en M. Si donc on prend le demi-plan central ω tel que $(\omega, \bar{u}_g) = +\frac{\pi}{2}$, on a

$$V = (\bar{u}_m, \omega) + \frac{\pi}{2} = (\mu\omega) + \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \cos(\omega\mu) \ . \tag{20}$$

Mais en vertu de (15),

$$p = \frac{\mathrm{OM}}{tg(\omega\mu)} \ .$$

Donc

$$\mathrm{OM} = \frac{ds}{d\sigma} \sin(\omega\mu) \ . \tag{21}$$

De (20) et (21) on déduit que

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 + p^2 = \frac{ds^2}{d\sigma^2} \ . \tag{22}$$

Par suite *si au point central* O *on élève la perpendiculaire* $\mathrm{OK} = |p|$ *pour avoir le point représentatif* K de MANNHEIM, *l'hypoténuse* KM *vaut* $\left|\frac{ds}{d\sigma}\right|$.

Elément linéaire de (Σ). Comme, en vertu de (10) et (22) on a

$$d\bar{u}\, d\bar{e} = -\mathrm{MO}\, d\sigma^2 \ ,$$

$$ds^2 = (\overline{\mathrm{OM}}^2 + p^2)\, d\sigma^2 \ ,$$

l'élévation de (3) au carré donne pour $d\mathrm{S}^2$ de la courbe (n)

$$d\mathrm{S}^2 = (d\,\mathrm{MN})^2 + (p^2 + \overline{\mathrm{ON}}^2)\, d\sigma^2 \ . \ ^1$$

12. — Lorsque la courbe initiale (m) est la trajectoire orthogonale des génératrices qui passe par le point central, (20) s'écrit, si on prend $(\omega\mu) = 0$,

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \ .$$

Donc *si on oriente arbitrairement la génératrice* g *ainsi que l'indicatrice sphérique des génératrices et si on oriente la trajectoire orthogonale passant par le point central de façon que le trièdre* $(\bar{u}, \bar{u}_m, \bar{u}_g)$ *soit de rotation directe, le paramètre de distribution est, en grandeur et en signe,* $\frac{ds}{d\sigma}$. (Voir d'ailleurs la formule (18).)

Cette définition du paramètre de distribution rappelle celles de la courbure et de la torsion en un point d'une courbe. On en déduit immédiatement que le paramètre de distribution pour une génératrice de la surface des binormales d'une courbe gauche est égal au rayon de torsion de la courbe au point correspondant.

---

1 DARBOUX, *loc. cit.* — VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 108.

13. — Lorsque la courbe initiale (m) est la ligne de striction de (Σ) on a, en vertu de (10)

$$\bar{u}_m \bar{u}_g = 0$$

et si V est l'angle $(\bar{u}, \bar{u}_m)$ apprécié autour de $\bar{u}_g$, (18) s'écrit

$$p = \frac{ds}{d\sigma} \sin V .$$

14. — *Théorème de* BONNET. *Une ligne* (m) *tracée sur une surface réglée* (Σ) *peut être soit une géodésique, soit une trajectoire des génératrices sous un angle constant, soit la ligne de striction. Si deux quelconques de ces propriétés lui appartiennent, il en est de même de la troisième* [1].

Prenons l'arc s de (m) pour paramètre. Soient ρ le rayon de courbure en M et $\bar{u}_1$ le vecteur unitaire porté par la normale principale. Si (m) est ligne de striction et trajectoire, on a

$$\bar{u}_m \frac{d\bar{u}}{ds} = 0 . \tag{23}$$

$$\bar{u}_m \bar{u} = a , \quad a = \text{constante}. \tag{24}$$

Dérivons (24), tenons compte de (23) et d'une formule de FRENET, il vient

$$\frac{\bar{u}_1}{\rho} \bar{u} = 0 . \tag{25}$$

Donc (m) est géodésique.

Si on a (23) et (25), on en déduit par addition

$$\bar{u}_m \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{d\bar{u}_m}{ds} \bar{u} = 0 ,$$

d'où (24).

Si on a (24) et (25) on en déduit (23) après dérivation de (24).

Novembre 1926. *Ecole des Mines de Mons.*

---

[1] O. BONNET, *Mémoire sur la Théorie générale des surfaces, Journal de l'Ecole Polytechnique* XXXIIme cahier, p. 70, 1848. — G. DARBOUX, *tome cité*, p. 311. — C. SERVAIS, *loc. cit.*, démontre ce théorème sans calculs, N° 18.