Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

Emile PICARD. — **Leçons sur quelques Equations fonctionnelles avec des Applications à divers problèmes d'Analyse et de Physique mathématique,** rédigées par M. Eugène Blanc. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule III.) — Un vol. gr. in-8° de VIII-188 pages et 61 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Les Cahiers créés par M. Julia ont, dès le début, la plus heureuse des fortunes et nous permettent d'étudier à loisir le haut et élégant enseignement dû à M. Emile Picard, ce qui est d'autant plus précieux que le Maître semble avoir renoncé à la publication du tome IV de son *Traité d'Analyse*. Cette renonciation est compréhensible, tant les équations aux dérivées partielles et les sujets associés se sont anarchiquement étendus mais M. Picard reste encore le géomètre le plus qualifié pour tenter de mettre de l'ordre dans ce chaos et, s'il ne nous donne pas un gros ouvrage didactique, raison de plus pour recueillir précieusement toutes les formes de ses belles expositions.

Il s'agit ici des équations fonctionnelles et de développements analytiques provenant de ce que les fonctions les plus naturellement nées en Analyse classique ont des propriétés exactes qui, tels les théorèmes d'addition, constituent précisément des équations fonctionnelles. D'ailleurs les plus élémentaires de ces dernières sont souvent liées de manière très intéressante à des faits également très simples mais qui s'en rapprochent de manière non évidente. Ainsi

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

s'attache à la composition des forces par la règle du parallélogramme et

$$f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y)$$

permet de passer au cas non euclidien et même à toute la trigonométrie non-euclidienne. Aller de là à la théorie des transformations linéaires planes, au groupe modulaire, n'est qu'un jeu qui, on le sait, a été poursuivi, par M. Picard, dans l'espace à trois dimensions, avec des groupes à polyèdre fondamental.

L'addition des fonctions elliptiques donne des relations fonctionnelles rationnelles à reconstruire, d'une manière générale, dans le monde des transcendantes uniformes. Au premier abord on ne retrouve guère que l'addition d'où l'on est parti mais la méthode ainsi créée va pouvoir s'appli-

quer à des questions plus générales notamment aux cas où peut exister un *théorème de multiplication rationnel*, c'est-à-dire aux cas où $f_i(at)$ est rationnel en $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$.

Le problème, envisagé d'abord par Henri Poincaré, a été poursuivi par M. Picard jusqu'au-delà des surfaces hyperelliptiques de Georges Humbert; il entraîne le maniement des intégrales abéliennes de première espèce et des transformations birationnelles dites aussi transformations de Cremona.

L'équation

$$F(x+1) - F(x) = f(x),$$

dans le monde des différences finies, généralise l'intégration ordinaire. Elle a été très étudiée en France, par Guichard, par M. Appell; M. Nörlund y rattache ses « Sommes » fonctionnelles. Elle incite à étudier des formules sommatoires que M. Lindelöf a liées à la théorie des résidus. Elle admet des généralisations, encore relativement très maniables, telles que

$$\varphi_0(x)\,F(x+1) - \varphi_1(x)\,F(x) = \varphi_2(x),$$

$$a_0\,F(x+n) + \ldots + a_n\,F(x) = G(x),$$

cette dernière entraînant la considération d'une équation algébrique *caractéristique*. Tout ceci peut conduire aux fonctions Θ, aux équations différentielles linéaires à intégrales uniformes, à l'équation de Lamé puis, de nouveau, aux transcendantes de M. Picard déjà effleurées à propos du théorème de multiplication rationnel. Ces transcendantes, qui ne peuvent que s'évanouir quand on leur impose certaines conditions d'holomorphie, se développent, au contraire, magnifiquement, à partir de points singuliers essentiels. Elles admettent d'ailleurs d'élégants prolongements analytiques tout en laissant en suspens certaines extensions qui feront peut-être la fortune de jeunes chercheurs.

L'itération est encore une question très étudiée en France par MM. Kœnigs, Julia, Fatou, ... Elle me fait également penser à Samuel Lattès, mon regretté collègue de Toulouse. Elle dépend historiquement d'une équation fonctionnelle due à Schröder ou plutôt, sous une forme antérieure à peine différente, à Abel. Les problèmes y sont très vivants avec les itérations successives amenant un point analytique vers des centres *attractifs*; il y a aussi des centres *répulsifs* pouvant toutefois devenir attractifs pour certaines inversions de substitutions.

Entre ces questions et l'équation fonctionnelle de Fredholm, il semble, à première vue, qu'il y ait une grande différence mais, à y regarder de près, ce sont toujours les singularités analytiques habilement maniées qui résolvent les problèmes.

En Physique mathématique, là où s'ébattent maintenant si bien les équations intégrales, les questions ne sont pas toujours obligatoirement analytiques par rapport aux variables mais elles peuvent alors l'être par rapport à certains paramètres. C'est du côté de ceux-ci que peuvent naître les singularités et les développements en série entière. Il y a là d'ailleurs une allure générale de la science mathématique actuelle; c'est ainsi que, dans la Théorie des groupes, on tend de plus en plus à voir les propriétés de ceux-ci au travers des propriétés de leurs groupes *paramétriques*. Il est donc

bien naturel que les considérations à la Fredholm aient été rapprochées, par M. Picard, de toutes les précédentes.

N'oublions point de féliciter M. Eugène Blanc, qui nous a peint la pensée du Maître non seulement avec fidélité mais avec un soin qui lui fait le plus grand honneur.

A. Buhl (Toulouse).

Henri Lebesgue. — **Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions primitives** professées au Collège de France. Deuxième édition. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel.) — Un volume gr. in-8° de xvi-342 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

La première édition de ces Leçons date de 1904. J'ai eu l'honneur de l'analyser brièvement, ici-même, en 1906 (t. VIII, p. 84). Depuis le chemin parcouru a dépassé tout ce que l'on pouvait prévoir. M. Lebesgue fut d'abord un de ces novateurs que des maîtres de la Science regardèrent avec défiance mais qui se révéla avoir vu juste. Il disséqua les Mathématiques et particulièrement la notion de continuité cependant que la Physique disséquait l'atome; si l'on ne peut pas encore dire, à l'heure actuelle, que les deux œuvres s'adaptent l'une à l'autre, du moins faut-il reconnaître qu'elles ont relevé d'une même nécessité, celle de voir au-delà des insuffisantes intuitions. Et le point de vue physique, que les mathématiciens consentent de moins en moins à abandonner — ce qui, chose étrange, leur vaut souvent les sarcasmes des physiciens ou, plus exactement, de certains physiciens — le point de vue physique, dis-je, est de ceux que M. Lebesgue veut avoir constamment à l'esprit même dans les généralisations qui, au premier abord, semblent des plus abstraites. L'intégration, nous dit-il, est toujours une opération analogue à celle qu'il faut faire pour calculer la quantité de chaleur nécessaire pour élever, de 1°, la température d'un corps. Il semble qu'aussi les idées acquises avec la naissance du Calcul différentiel absolu aient une réplique des plus naturelles dans le domaine du Calcul intégral, réplique pouvant livrer immédiatement de vastes généralités concernant la définition de l'intégration. En Calcul différentiel absolu, toute expression monome à deux indices, $u_i\, v_i$, implique une sommation en i; dès lors, que v_i devienne un dx_i et les sommations limites en $u_i\, dx_i$ s'imposeront sans autre idée préalable. Il restera seulement à reconnaître les cas où ces sommations limites auront un sens. L'immense intérêt de cette manière de raisonner provient de ce que ces cas sont prodigieusement étendus par rapport aux cas primitifs, souvent plus complexes et beaucoup moins bien définis encore, où l'on croyait voir l'intégrale sous une physionomie géométrique simple mais peut-être trop intuitive pour être bien logique.

Et cependant ceci ne doit pas tourner à l'élimination du point de vue géométrique; il faut, avec les ensembles et la théorie de la mesure, rechercher si l'on ne pourrait pas retrouver la maniabilité indéniable de l'intégrale géométrique. Beaucoup de résultats très généraux peuvent être obtenus dans cette voie mais, d'autre part, la théorie de la mesure des ensembles ne va pas sans ces difficultés paradoxales auxquelles s'attache le nom de Zermelo et qui reviennent à se demander s'il y a existence — et même existence pouvant figurer dans certains raisonnements — pour ce qui ne peut être ni bien défini ni même nommé. Ici les Mathématiques nous

conduisent aux confins extrêmes de la Théorie de la Connaissance et en font sentir l'infirmité tout autrement que par des considérations philosophiques d'humilité.

A mon avis, cependant très humble, voilà un point qui, en mettant les choses au mieux, peut être la source d'améliorations continuelles mais sans qu'on puisse jamais y découvrir une base définitive pour la construction logique. Quelles envolées derrière la petite notion d'intégrale que les candidats au baccalauréat commencent à connaître et comme elles suffisent à diriger la curiosité vers l'œuvre d'un Lebesgue alors qu'il est évidemment de toute impossibilité de peindre vraiment celle-ci en un minuscule article bibliographique.

M. Denjoy, esprit pénétrant extrêmement habile à jongler avec les paradoxes, quant à l'intégration des fonctions sommables et la recherche des primitives a réussi à dégager des généralités étendues grâce à la notion du « presque partout » qui revient à la considération d'ensembles de mesure nulle. Mais le collaborateur le plus intime, le plus profond de M. Lebesgue est, sans contredit, M. René Baire qui, professeur de spéciales, remarquait déjà la façon désinvolte dont l'enseignement utilisait les notions de continuité. Lui ayant une fois parlé de M. Lebesgue, il me répondit: « C'est mon frère spirituel ! »

Maintenant il est heureusement hors de doute que la Science n'oubliera point cette fraternité. On peut partir des classes fonctionnelles de M. Baire pour aboutir à la « totalisation » de M. Denjoy qui semble bien être, pour les primitives, le procédé de construction le plus général. Il reste toutefois l'intégrale de Stieltjes qui relève d'une idée dont on est tenté de dire qu'elle s'oppose ou peut s'opposer symétriquement à toutes les précédentes avec les mêmes degrés de généralité. Reprenons les $u_i\, dx_i$. Jusqu'ici, ce sont les u_i qui ont surtout été variés. Stieltjes s'est acharné sur les dx_i, leur prêtant de très diverses constitutions fonctionnelles. Pour certaines de ces constitutions, de nouveaux paradoxes naissent en foule, venant parfois jusqu'à menacer la notion d'intégrale de fonction continue ! Faut-il en dire davantage pour signaler le caractère général de cette analyse ? Que d'horizons nouveaux elle ouvre sur tout ce qui touche à la constitution de la notion de grandeur ! Et il y a encore le transfini qui ne peut être pratiquement atteint tout en nous imposant cependant ses lois d'ordination. Depuis Cantor, les Lebesgue, les Baire, les Denjoy, les Young (M. et Mme W.-H.) et quelques autres soigneusement cités dans cette seconde et magnifique édition, ont apporté à l'Analyse un esprit de profondeur qui donne parfois le vertige.

A. Buhl (Toulouse).

Maurice Fréchet. — **Les Espaces abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse générale.** (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel.) — Un volume gr. in-8° de xii-296 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

« Le continu fonctionnel n'offre à notre esprit aucune image simple. « L'intuition géométrique ne nous apprend rien, *a priori*, sur son compte. « Nous sommes forcés de remédier à cette ignorance et nous ne pouvons le « faire qu'analytiquement, en créant à l'usage du continu fonctionnel un « chapitre de la Théorie des ensembles. » Ces lignes, dues à M. Jacques

Hadamard, ont été publiées, en 1912, par *L'Enseignement mathématique* (t. XIV, p. 17). Elles servent de frontispice au présent ouvrage et nous sommes heureux de montrer que notre Revue joue parfois un rôle prophétique. La prophétie est analogue à celle qu'on aurait pu faire dès l'apparition des premiers travaux des Lebesgue et des Baire. L'enseignement des Mathématiques, surtout dans les Facultés françaises, s'élève peu au-dessus des Mathématiques générales. Nombreux sont les élèves qui, préparés par ce premier exposé, font ensuite un an de Calcul infinitésimal et s'en tiennent là. On est toujours dans le voisinage des fonctions élémentaires et des propriétés les plus immédiatement accessibles par intuition. Et beaucoup de professeurs mêmes veulent que la vraie science ne soit que là. Plus loin, ils ne voient qu'un symbolisme peu compréhensible, à peu près sans objet.

Il faut de puissants esprits, comme celui de M. Maurice Fréchet, pour construire et faire admirer une Analyse générale en laquelle les notions fondamentales semblent à peu près se nommer comme des notions intuitives et vulgaires correspondantes tout en entrant dans des combinaisons logiques incomparablement plus parfaites. Et, personnellement, je suis absolument persuadé que cette science générale ne se sépare pas du monde réel. Sans doute l'image, dont parle M. Hadamard dans les lignes précitées, paraît fréquemment absente au premier abord mais c'est parce que les images commodes habillent souvent très mal le réel; une réalité de mieux en mieux pénétrée semble de moins en moins révéler une structure simple et un esprit de plus en plus pénétrant doit trouver à y placer les plus abstraites conceptions de cet esprit qui — postulat qui m'est cher — ne peut rien avoir en lui qui ne soit quelque reflet, quelque forme d'une réalité.

Les réalités sont prodigieusement transformables par opérations spirituelles; ainsi nous trouvons dans ce livre les *espaces* de M. Hilbert, de M. Baire, de M. Banach, etc.

Un poème est un assemblage de lettres dans un espace poétique; après l'impression, ces mêmes lettres seront dérangées puis rangées à nouveau, très méthodiquement, dans les casses typographiques. Il y a ordre dans les deux cas. Conçoit-on, par cet exemple qui, au premier abord fait l'effet d'une boutade mais est cependant tout ce qu'il y a de plus sérieux, l'immense importance de la notion d'ordre ? Ce n'est que lorsque des espaces sont convenablement ordonnés qu'on peut dire si certaines notions, considérées autrefois comme primordiales, telles la notion de distance, y ont véritablement une raison d'être. Je me hâte d'ajouter que les espaces (D) associables à la notion de distance jouent un rôle d'une importance immense dans l'œuvre de M. Fréchet. Ce dernier est aussi partisan de la théorie des habillements géométriques plus ou moins ajustés dont nous revêtons les champs fonctionnels (p. 124); il ne faut pas croire qu'on a analysé le champ quand on a analysé le vêtement. Que de querelles ont été engendrées par des confusions ainsi commises. Les espaces *affines*, admettant comme cas particuliers les espaces vectoriels, sont les vêtements de travail les plus usuels; abstraire ces espaces ne fait qu'épurer leur structure sans nuire à leurs excellentes qualités pratiques. Et ainsi, grâce à la notion de distance et aux espaces (D) qui s'accomodent de ses modalités, le volume contient une première partie tangente à la science maniée ordinairement.

Une deuxième partie est plus essentiellement philosophique. La notion de distance peut s'évanouir en laissant subsister quelque chose d'un espace de même que la convergence uniforme peut disparaître en laissant subsister

quelque chose d'une série. Parler de la distance de a et b, c'est envisager une certaine liaison entre a et b mais non pas l'ensemble de toutes les liaisons possibles; b peut révéler son existence en a autrement que par la donnée d'un nombre ou d'une mesure et s'il se révèle en a, sans être a, une notion d'espace en résulte. Nous n'essaierons point de décrire en détail cette seconde partie; disons seulement qu'elle nous ramène à MM. Lebesgue, Baire, Denjoy, ... avec un langage géométrique que ces savants ne croyaient pas toujours pouvoir conserver. La notion de continuité, avec ses infinies complexités, s'associe enfin à la notion d'espace fonctionnel dans les cas où l'association peut être permise mais que de précautions il faut pour en arriver là. Ignorer ces précautions, c'est s'exposer aux pires paradoxes, les étudier, c'est en voir naître. Ce que nous scrutons vraiment, en tout ceci, c'est notre façon de concevoir, indéniablement imparfaite mais qui nous présente sans cesse de nouveaux objets quand nous nous proposons de réfléchir et de travailler. Ces objets, nous n'avons pas à les refuser et, quand on peut en faire des tableaux aussi joliment ordonnés que ceux de M. Fréchet, on a certainement fait une œuvre hautement scientifique.

A. Buhl (Toulouse).

Thomas Tommasina. — **La Physique de la Gravitation et la Dynamique de l'Univers.** — Un vol. gr. in-8° de viii-302 pages avec un portrait et un autographe de l'auteur. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

Ceci me paraît être le second ouvrage antieinsteinien, d'apparence sérieuse, dont nous nous efforcerons de rendre compte avec impartialité. Le premier était constitué par les *Espaces courbes* de MM. Burali-Forti et Boggio dont nous avons entretenu, en effet, les lecteurs de *L'Enseignement mathématique* (t. XXIII, 1923, p. 334). Personnellement, je suis habitué à rencontrer un style analogue à celui de M. Tommasina dans des brochures que revues ou éditeurs ne publient point d'où finalement recours à un imprimeur quelconque et aspect caractéristique.

Ici ce n'est pas du tout le cas et j'ai sous les yeux un fort beau volume édité avec tout le soin que la maison Gauthier-Villars apporte à ses productions. Malheureusement, ceci ne rend pas plus convaincante la thèse de l'auteur qui est d'abord une diatribe dirigée contre les mathématiciens. Dès la page 3, le mathématicien est très conservateur, très routinier! Vraiment ? Il me semblait, au contraire, qu'Einstein et ses disciples avaient eu contre eux tous ceux qui craignaient d'avoir à changer quelque chose à leurs conceptions acquises. Mais ceci n'est rien encore et les choses s'aggravent rapidement avec des attaques répétées contre Henri Poincaré dont le génie même est discuté avec tentative de rabaissement. Après cela, il me faut un grand effort pour continuer mon examen. Si je n'écoutais que mon impulsion, je mettrais le livre de côté et n'y songerais plus. Comment un penseur de l'âge de M. Tommasina peut-il ne pas savoir, ou du moins oublier, que les théories de valeur doivent triompher d'elles-mêmes sans qu'il soit besoin d'en rabaisser d'autres, sans qu'il faille se servir d'aucune expression péjorative dirigée contre qui que ce soit ? Mais l'analyse de l'œuvre ne peut être poursuivie en cataloguant les innombrables critiques que distribue l'auteur aux uns et aux autres; ce n'est que la partie négative d'un travail cependant grand et sincère. Essayons plutôt de voir la partie

positive, la théorie apportée. Celle-ci existe indéniablement et me paraît être une physique des radiations, ayant pour substratum l'éther, avec tendance aux représentations mécanistes. La cause de la gravitation serait en l'éther et comme elle aurait à provoquer les mouvements des astres non à les empêcher, ceci fait ingénieusement tomber l'idée d'une résistance éthérée devant s'opposer aux mouvements de la matière cosmique. Voilà qui va évidemment au delà de l'idée newtonienne. L'attraction à distance n'est plus acceptée comme une image; elle se mécanise. La gravitation tient à l'électromagnétisme par l'intermédiaire de la force de Maxwell-Bartoli. Il est certain que tout cela peut faire une théorie cohérente mais, d'après M. Tommasina, les travaux analytiques n'ont aucune valeur pour la Physique s'ils ne conservent pas une liaison parfaite avec l'explication mécanique (p. 160). Il y a donc une sorte de Mécanique primordiale qui conditionne tous les phénomènes. Quelle est cette Mécanique ? Quels sont ses postulats, ses équations fondamentales ? Comment se relie-t-elle à la Géométrie et à quelle géométrie ? Et puis il y a ici une trop grande confiance dans la notion de distance considérée comme une notion tout à fait première; vraiment je préfère la Gravifique qui cherche à définir les distances en même temps que les phénomènes gravitationnels.

Pour la notion de volume j'aperçois aussi des incertitudes; la matière ne peut exister qu'à l'état pulvisculaire, chaque grain de cette poussière ayant nécessairement un volume réel (p. 135). Ceci suppose des dimensions linéaires définissables mais par comparaison avec quels mètres qui eux aussi sont pulvisculaires ? Je ne dis pas que toute comparaison est impossible mais la difficulté est grande et je ne vois guère d'essai de solution que dans les ds^2 à coefficients singuliers.

Je m'arrête. Je ne pourrais pas détacher, n'importe où, dix lignes de cet ouvrage sans avoir à faire des réflexions analogues à celles dont je viens de donner quelques exemples. Et cependant je ne le condamnerai point. C'est un monument harmonieux et dont l'harmonie apparaî rait bien mieux encore si l'on y retranchait les critiques, parfois peu esthétiques, qui s'adressent à d'autres monuments tout aussi sincères et harmonieux. L'auteur croit à *sa* théorie qui serait *vraie*, peut-être *la seule vraie*. Je pense toujours que, grâce aux progrès de la Science et de la Philosophie scientifique, il viendra une époque ou aucun savant n'affichera plus de telles opinions.

A. Buhl (Toulouse).

Ludovic Zoretti. — **Les Principes de la Mécanique classique** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXX). — Un fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1928.

Pour bien comprendre l'objet de ce fascicule il faut d'abord lire le titre bien complètement. Il s'agit de la Mécanique *classique*. Dès lors le dit fascicule peut être écrit comme il aurait pu l'être il y a trente ans; cette constatation n'est plus une critique car il est indéniable que, depuis trente ans, l'enseignement technique de la Mécanique et même celui qui conduit au Certificat de Mécanique rationnelle n'ont point varié. Le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Paul Appell domine toujours et dominera longtemps. Seulement, même de ce côté, il y a eu un complément et j'aurais

aimé voir l'esprit analytique de M. Zoretti évoluer *aux limites* du classicisme; il n'a point voulu aller jusque là et nous avertit même (p. 15) qu'il ne sera pas question de la théorie de la relativité. Jusqu'ici rien à objecter; le plan d'un travail est ce que décide son auteur. Mais, à la page suivante, précisant que les mouvements ne seront considérés que dans l'espace euclidien (encore rien à dire) il ajoute dans une note: « Cela ne veut pas dire qu'il ne soit pas « possible de construire une mécanique non euclidienne, comme il existe « une géométrie non euclidienne. Mais les essais dirigés dans ce sens n'ont, « jusqu'ici, rien donné d'intéressant. » Eh bien, ceci me semble un peu violent !

Je m'en tiendrai à cette simple exclamation pour reprendre l'examen positif. En ne cherchant, dans l'exposition de M. Zoretti, que ce qu'il y a mis, il est certain qu'on y trouve d'excellentes choses. Il nous fait surtout de l'histoire. Or, depuis Aristote et Archimède, jusqu'à Hertz et Mach (puisqu'il est entendu qu'on ne va pas plus loin) qui peut se vanter de bien connaître l'histoire de la Mécanique ? On sent bien les influences prodigieuses de Galilée et de Newton mais on les relie assez mal à d'autres qui, pour être moins importantes, n'en ont pas moins laissé des noms attachés à des théorèmes.

D'ailleurs M. Zoretti est d'accord avec l'esprit philosophique moderne lorsqu'il écrit (p. 50) que la Science n'en est plus à la recherche de l'absolue vérité et du définitif, que son rôle apparaît comme plus relatif et modeste dans le choix d'un provisoire simple et commode, éminemment utile s'il produit une *économie de pensée*. Le fascicule est aussi excellent au point de vue bibliographique; il permettra de remonter aisément à toutes les sources de grande valeur.

A. Buhl (Toulouse).

Bertrand Gambier. — **Applicabilité des Surfaces étudiée au point de vue fini** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXI). — Un fascicule gr. in-8° de 66 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

Ce fascicule a suivi de près l'élégant fascicule XXVI du même auteur. Il n'est pas moins remarquable que le précédent. M. Gambier dit, très justement, que les théories géométriques, qu'il perfectionne cependant si bien, sont celles où le jeune chercheur aperçoit, le moins aisément, la coordination des idées générales au milieu des résultats isolés. Cela paraît tenir aux équations aux dérivées partielles qui sont au fond de ces questions et pour lesquelles, malgré de grands progrès, la notion d'intégrale générale n'apparaît pas encore de façon maniable; il faut se contenter de solutions particulières parfois très disparates pour une même équation. D'autre part ces questions d'applicabilité sont initialement posées à partir de ds^2, comme les questions de la Physique théorique, et l'on peut alors se demander si les mondes *géométriquement* accessibles ne forment pas des catégories analogues aux Univers physiques tangibles, catégories dont la vue claire ne résulte pas toujours de la simple donnée d'une métrique. Ce qui pourrait venir à l'appui de cette manière de voir c'est que de très belles théories accessibles paraissent vivre sur une notion géométrique spéciale, que le progrès dégagea tout à coup et qui les ordonne comme le postulatum d'Euclide ordonne la géométrie élémentaire. Comme exemple d'une telle notion, on peut citer

le parallélisme de Peterson qui correspond à un ds'^2 en P^2E, 2 PQF, Q^2G et qui donne, tantôt une seule déformée, tantôt une infinité. Les ds^2 à *auto-transformations* relèvent d'une idée analogue très esthétiquement utilisée par Bianchi dans la déformation des quadriques. C'est aussi avec M. H. Weyl que les ds^2 des simples surfaces bénéficient de tout ce qu'il a fallu faire pour eux dans les hyperespaces plus ou moins physiques. Ici apparaît l'impossibilité d'une déformation totale de la sphère ou même de surfaces convexes; bien plus, il y a des ds^2 qui présentent de certains caractères de *convexité* tels qu'ils ne peuvent définir, dans l'espace à trois dimensions, qu'une surface fermée et une seule. Ces citations touchent aux points les plus savants de l'exposé mais ils ne doivent nullement faire conclure à l'aridité de celui-ci. M. Gambier n'a négligé en rien les cas élémentaires, allant même jusqu'à commencer par l'applicabilité des surfaces de révolution ou des hélicoïdes. Puis il a suivi Guichard, Goursat, Hazzidakis et d'autres producteurs d'élégances géométriques parfois isolées mais nous faisant admirablement comprendre l'importance des synthèses commençant à se réaliser aujourd'hui.

A. Buhl (Toulouse).

Ch. Riquier. — **La Méthode des Fonctions majorantes et les Systèmes d'Equations aux dérivées partielles** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXII). — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

La célébrité de M. Riquier est établie depuis longtemps dans ce domaine des fonctions majorantes ou du Calcul des limites de Cauchy. Je me fais même un devoir et un plaisir de rappeler son grand ouvrage sur *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, publié en 1910 et que j'eus l'honneur d'analyser ici (t. XII, p. 258). Cet ouvrage était peut-être bien imposant et je sais quelques géomètres qui se réjouirent lorsqu'en 1920, M. Maurice Janet publia, sur le sujet, une Thèse plus maniable; ceux-là se réjouiront encore davantage d'avoir maintenant un simple fascicule dû au créateur même. Car M. Riquier est bien un créateur, un esprit très pénétrant qui travaille inlassablement sur un thème d'apparence aride et qui sait, d'une remarque initiale, déduire de lointaines conséquences. Il s'agit des séries entières qui satisfont aux équations différentielles ou aux équations aux dérivées partielles et qui, bien entendu, ne sont finalement admissibles que lorsqu'elles convergent. Le domaine est analytique. Méray, en 1880, voulut reprendre, très généralement, le problème de Cauchy; il publia quelques erreurs dont les rectifications furent des traits de lumière pour M. Riquier. Les erreurs d'un homme de talent — et Méray en était certainement un — ont encore du prix.

Quant aux méthodes mêmes, maintenant résumées, elles consistent d'abord dans le choix des formes attribuables aux systèmes différentiels, aux formes qui en proviennent par des dérivations successives, à la façon de grouper les termes des développements satisfaisant aux dits systèmes et ce au moyen de *coupures* séparant de ces séries des ensembles de termes à diviseurs identiques. La *passivité* vise certaines possibilités de résolution, les *cotes* numérotent des dérivations successives, l'*orthonomie* est une première forme canonique propre à déceler facilement la passivité,...; on voit qu'à l'idée, facile à accepter en bloc, des dérivations successives qui doivent

donner des coefficients tayloriens, M. Riquier adjoint toute une minutieuse méthodologie qui peut servir à la classification des systèmes différentiels, d'abord quant à leur forme proprement dite, ensuite quant aux formes possibles des séries entières qui y satisfont. Il s'agit surtout de méthodes d'ordination qui forment maintenant un tableau bref et élégant.

Ces lignes étaient écrites lorsque les *Comptes rendus* du 21 janvier 1929 nous ont appris la mort de Ch. Riquier; on voit qu'il était de ceux qui ont travaillé jusqu'à leur dernier souffle. A. Buhl (Toulouse).

A. Buhl. — **Aperçus modernes sur la Théorie des Groupes finis et continus** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXIII). — Un fascicule gr. in-8° de 54 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Il y a deux points de vue dans ce fascicule ou, plus exactement et pour parler le langage de l'auteur, deux sentiers qui, s'ils n'ont pas la prétention d'avoir beaucoup de surface, n'en vont pas moins jusqu'au cœur de la Théorie des Groupes de Lie.

D'abord les méthodes de Grassmann et de Pfaff, renouvelées par M. Elie Cartan, conduisent, par leur seul symbolisme, à au moins six grandes théories de même origine analytique et à développements parallèles. Ce sont la théorie des groupes finis, celle des groupes infinis, celle du trièdre mobile, celle des espaces de Riemann avec courbure et des espaces à torsion selon M. Cartan, la théorie électromagnétique de Maxwell avec ses prolongements einsteiniens et enfin la géométrie de Cayley. Cette dernière géométrie, il est vrai, rentre dans celle des espaces de Riemann mais elle peut être construite à part avec tout l'intérêt des théories précédentes. Les procédés générateurs d'aussi vastes généralités sont tels qu'on n'attirera jamais trop l'attention sur eux.

Les systèmes différentiels linéaires tels que

$$\frac{d\theta^s}{dt} + C_k^s \theta^k = 0$$

permettent d'autres aperçus d'un puissant caractère synthétique. Hors le cas élémentaire des C_k^s constants, ces systèmes ne sont guère intégrables mais ils prennent un caractère de maniabilité spécial quand les C_k^s ont la forme $c_{jk}^s \lambda^j$, les λ^j contenant, outre t, des paramètres arbitraires. Et ce qui apparaît alors c'est la Théorie des groupes à laquelle on peut accéder ainsi très directement. Il y aurait même là une manière très originale de la présenter, manière que M. Buhl n'a utilisée qu'avec discrétion, en s'imposant, au contraire, de retrouver d'abord les théorèmes fondamentaux de Sophus Lie. Le premier théorème de Lie conduit aisément à un certain système différentiel non linéaire, dit de Maurer-Cartan, dont l'intégration dépend d'un système linéaire de la forme indiquée d'abord.

Il n'est pas facile de donner, sans plus de formules, une idée quelque peu profonde de l'analyse de M. Buhl mais, si l'on compare ce court exposé à l'aride entassement constitué par les *Transformationsgruppen* de Lie et Engel, on éprouve une grande sensation de soulagement.

H. Fehr.

H. VERGNE. — **Ondes liquides de gravité** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXIV). — Un fascicule gr. in-8 de 58 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Le nom de M. Vergne s'associe aisément au titre indiqué car voici une vingtaine d'années que cet auteur nous donna une belle Thèse sur les ondes liquides. Il s'agit surtout des petits mouvements d'un liquide pesant, contenu dans un vase fixe, lorsque ces mouvements sont dus à des causes exclusivement superficielles, impulsions ou émersion d'un corps solide. Le premier cas traité, celui d'un bassin indéfini en tous sens, n'associe que deux équations aux dérivées partielles du second ordre, celle de Laplace et celle du conducteur linéaire; on peut y satisfaire par séries entières où interviennent les polynomes de Legendre. D'une manière générale, les méthodes de Cauchy et Fourier sont applicables. Ceci n'empêche pas que M. Boussinesq a traité la question sur une équation du quatrième ordre à laquelle on peut satisfaire par des types remarquables d'intégrales définies.

Si l'on veut abandonner le bassin indéfini en tous sens et passer au cas de véritables parois, on n'aperçoit guère de moyens de conserver l'esprit des méthodes précédentes.

On arrive à une équation intégro-différentielle formée par M. Hadamard et qui s'étudie avec le secours des fonctions harmoniques. Elle ne va pas sans difficultés singulières dont certaines ont été étudiées par M. G. Bouligand. Encore que fort élégamment traités ici, ces problèmes n'en sont pas moins, en eux-mêmes, assez ardus. On peut alors aller au devant de certaines solutions en supposant à celles-ci certaines formes analytiques, par exemple la forme périodique; ceci coïncide d'ailleurs tout naturellement avec la possibilité physique. C'est ainsi qu'avec des ondes périodiques très simples on peut faire apparaître de remarquables combinaisons interférentielles, des phénomènes tels que le *clapotis*. Enfin apparaissent aussi des questions de similitude dont l'étude générale est encore fort difficile mais qui n'en donnent pas moins quelques énoncés simples si l'on ne considère que des périodes d'oscillations. Il est à peine besoin de dire que tout ceci ne constitue pas forcément une science abstraite et que la Théorie des marées, celle des seiches des lacs peuvent trouver dans l'exposé de M. Vergne un premier développement qui facilitera beaucoup l'examen de cas géographiques plus complexes.

A. BUHL (Toulouse).

Georges MOREAU. — **Propriétés électriques et magnétiques des flammes** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. III). — Un fascicule gr. in-8° de 52 pages et 15 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Le Mémorial des Sciences physiques poursuit sa carrière et, s'il n'est pas encore aussi développé que son congénère des Sciences mathématiques, rien n'empêche d'espérer en sa croissance rapide et brillante. Mentionnons, quant aux analyses qui seront publiées ici, que nous ne pouvons les faire avec l'autorité d'un physicien expérimentateur, ce que d'ailleurs nous ne cherchons pas. Nous nous efforcerons simplement de signaler ce qui, dans ces fascicules, peut intéresser les mathématiciens. Celui de M. Georges Moreau est particulièrement physique; il nous montre comment les flammes, de même que les liquides, peuvent transporter l'électricité par ionisation.

Mais les belles formules mathématiques ne manquent point. Relevons d'abord une théorie de J.-J. Thomson en laquelle X, intensité du champ, donne lieu à une équation différentielle, linéaire en X^2, à laquelle on associe aisément, pour la distribution du potentiel dans la flamme, une formule quadratique en i courant total.

La présence d'un sel, d'un élément halogène dans une flamme semblent généralement augmenter la conductibilité. La constitution des édifices ioniques peut parfois être interprétée graphiquement de manière simple et les masses des ions donnent lieu à des considérations théoriques et expérimentales qui s'accordent fort bien. La théorie cinétique indique toutefois une mobilité corpusculaire beaucoup plus grande que celle observée.

La conductibilité des flammes pour les courants de haute fréquence donne lieu à d'élégants systèmes d'équations à solutions exponentielles.

Restent les actions magnétiques et particulièrement le phénomène de Hall. On observe ici de très fortes et curieuses diminutions de la mobilité. Un champ magnétique transversal peut diminuer la conductibilité d'une flamme; les ions n'ont plus de trajectoires rectilignes. Les flammes sont fortement diamagnétiques, ce que l'on peut constater sur une simple flamme de bougie. Enfin l'analogie des flammes et des électrolytes se poursuit jusqu'à la réalisation, par flammes pures ou salées, de couples analogues aux piles voltaïques. Et de curieux phénomènes d'ionisation persistent pour les gaz issus.

L'intérêt du sujet est considérable. Est-il besoin d'ajouter que M. Georges Moreau apparaît ici non seulement comme théoricien mais comme expérimentateur des plus compétents.

A. Buhl (Toulouse).

F.-H. van den Dungen. — **Les Problèmes généraux de la Technique des Vibrations** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. IV). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages et 13 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Cette fois les précautions semblent inutiles pour présenter ce fascicule dans une Revue mathématique; il sera d'un intérêt prodigieux pour les géomètres. On y distingue au moins deux grandes idées. L'une consiste à bâtir l'équation intégrale de Fredholm sur la considération même des phénomènes vibratoires, procédé déjà employé par Schmidt et qui se rattache également aux travaux de Weyl mais qui est présenté ici avec une élégance toute particulière et le souci continuel d'interpréter physiquement tout le symbolisme analytique; l'autre consiste à agir en physicien non seulement pour les besoins d'une cause analytique mais en rassemblant et décrivant sommairement une foule d'appareils qu'en général les mathématiciens ne connaissent qu'imparfaitement et avec lesquels ils seront ravis de se familiariser.

Au point de vue technique, les phénomènes de résonance sont, suivant les cas, des plus utiles, des plus jolis ou des plus funestes; il y a d'ailleurs une résonance mathématique qui permet de cataloguer une foule d'états critiques non obligatoirement vibratoires. A ce point de vue très général, je ne vois point d'œuvre qui ait véritablement précédé celle de M. van den Dungen, qui soit une au si riche synthèse dans un cadre aussi restreint. Cette synthèse n'en commence pas moins avec les cas régis par les simples

équations différentielles du second ordre à coefficients constants mais l'auteur montre rapidement les grandes difficultés qu'on rencontre quand on veut juger de certains phénomènes complexes en ne s'appuyant que sur ces préliminaires par trop simples. Suit toute une métrologie avec son appareillage ingénieux. Les considérations à la Fredholm deviennent tout ce qu'il y a de plus intuitif et conduisent à la considération de *nombres fondamentaux* qui me semblent proches parents des constantes de structure de la Théorie des groupes. Ces considérations sont mises d'accord tantôt avec des formules empiriques, tantôt avec les méthodes d'approximations successives de M. Emile Picard ou même avec les théorèmes d'existence de Cauchy-Lipschitz. Vraiment les talents de M. van den Dungen sont multiples et font de ce fascicule une œuvre extrêmement originale ayant des valeurs théorique et technique de tout premier ordre.

N'oublions pas de signaler des recours à l'intégrale de Stieltjes (p. 25), intégrale dont il était question plus haut, lors de l'analyse du livre de M Henri Lebesgue. Ainsi des notions analytiques, que d'aucuns jugent très abstraites, auront été introduites ici d'une manière absolument naturelle. Voilà bien ce qui caractérise la Science au sens le plus noble du mot ; les disciplines s'unissent, l'esprit qui consisterait à les opposer apparaissant comme absolument stérile.

A. Buhl (Toulouse).

Jean Barbaudy. — **Les Bases Physico-chimiques de la Distillation.** Préface de M. H. Le Chatelier (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. V). — Un fascicule gr. in-8° de 66 pages et 30 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

Beaucoup d'intérêt encore et un curieux rapprochement à souligner. Prenons d'abord la chose par ses grands côtés. La Mécanique chimique toute entière domine le problème car les distillations s'effectuent par une sorte de rupture d'équilibre dont l'étude suppose la connaissance des lois générales d'équilibre des systèmes physico-chimiques. En outre nous touchons ici à une préoccupation pratique, d'importance capitale, soulignée par M. Le Chatelier dans sa Préface: les méthodes de rectification qui, espérons-le, nous livreront bientôt des carburants liquides susceptibles de remplacer l'essence de pétrole.

Mais j'ai hâte d'arriver au rapprochement signalé en première ligne. On appelle *azéotropes* des mélanges homogènes à point d'ébullition fixe; leur présence peut opposer des limites infranchissables à la séparation de constituants. A qui en doit-on la principale étude moderne et le nom même d'*azéotropisme* ? M. Barbaudy nous rappelle que c'est à M. Lecat, à M. Maurice Lecat, le savant belge bien connu des mathématiciens pour ses profondes et difficiles recherches sur les déterminants et matrices à n dimensions, recherches dont nous avons, à plusieurs reprises, entretenu nos lecteurs. Quels mystérieux rapports entre cette vertigineuse algèbre et l'azéotropisme ? Pour l'instant, je n'en vois point mais la chose mérite d'autant plus d'être signalée; il est vraiment remarquable que M. Lecat puisse rendre de grands services à la Science dans des domaines aussi différents. Il y a là, certainement, une dualité d'esprit qui n'est point banale.

L'exposition de M. Barbaudy se résout surtout en d'élégants procédés graphiques dont certains doivent être continués mentalement dans l'espace

à trois dimensions. Ainsi les courbes de rosée et d'ébullition des systèmes binaires deviennent nappes de rosée et nappes d'ébullition dans le cas des systèmes ternaires cependant que, sur ces nappes, jouent des courbes de vaporisation ou de liquéfaction.

La bibliographie du sujet est riche et ne comprend pas moins de 115 citations en lesquelles MM. Barbaudy et Lecat sont en bonne compagnie. Les recherches industrielles y tiennent une grande place, ce qui n'empêche pas l'auteur de témoigner d'une grande confiance en les progrès que la question devra encore à ceux de la Mécanique chimique.

A. Buhl (Toulouse).

Emile Sevin. — **Le Temps absolu et l'Espace à quatre dimensions. Gravitation. Masse. Lumière.** — Un vol. gr. in-8° de IV-128 pages et 39 figures. Prix : 22 francs. A. Blanchard, Paris, 1928.

De même que la possibilité d'une explication mécanique des phénomènes physiques entraîne, d'après Henri Poincaré, la possibilité d'une infinité de telles explications, l'existence des théories einsteiniennes entraîne aussi une possibilité d'existence pour une infinité de théories analogues. C'est certainement en vertu de cette remarque qu'existe l'ouvrage de M. Emile Sevin. On y dispose de la géométrie autrement que ne l'a fait Einstein et en accompagnant le point de vue géométrique de certaines considérations mécanistes. Je ne crois pas que ceci puisse modifier la direction actuelle des courants de la Physique théorique mais c'est souvent fort ingénieux. L'auteur sépare géométriquement l'éther, qui forme une sorte de variété universelle à trois dimensions, de la matière qui, toujours très proche de la variété précédente, exige cependant une quatrième dimension spatiale. Tout cela existe avec un temps absolu qui n'est pas obligatoirement géométrisable. La séparation de l'éther et de la matière prétend résoudre une fois de plus la difficulté de la non-résistance de l'éther aux mouvements astronomiques. La matière ne traverse pas ainsi le milieu éthéré; elle lui est extérieure et, tout au plus, glisse sur lui. On conçoit que cette manière de se représenter les choses puisse poser, très originalement et sous des aspects nouveaux, tous les problèmes relatifs aux rôles réciproques de la matière et de l'éther. Quant à l'éther seul, son rôle est, comme toujours, surtout lumineux et ondulatoire.

L'esprit critique de l'œuvre est excellent car non seulement l'auteur ne critique personne, au sens immoral du mot, mais il passe en revue toutes les contradictions qui se sont fait jour, çà et là, depuis dix ans, en essayant de les concilier à l'aide de sa théorie et il prouve au moins ainsi que celle-ci n'est pas dépourvue de qualités plastiques. Ainsi sont comparées l'ancienne expérience de Michelson-Morley et la variante de Miller au Mont Wilson. La dissymétrie optique de l'espace signalée par M. Ernest Esclangon (Comptes rendus, 27 décembre 1927) trouve elle-même une interprétation.

La gravitation intra-atomique et la gravitation astronomique ne vont pas sans développements analytiques remarquables témoignant d'un savoir fort supérieur à celui du technicien ordinaire, ce qu'il n'est pas inutile de souligner car M. Emile Sevin est ingénieur tout comme le fut d'abord Einstein. Or, pas plus que ce dernier, il ne croit que la mécanique qui suffit pour les ponts et les locomotives doive suffire aussi aux problèmes intéressant la structure de l'Univers.

Comme nous le disons toujours en des circonstances de ce genre, il n'y a pas lieu de se prononcer sur le degré de réalité, de vérité à attribuer à la tentative; l'harmonie seule est à considérer. Or le livre est d'une esthétique fort remarquable; il met fréquemment les formules en nombre et cherche à utiliser beaucoup de données numériques. C'est d'une peinture peut-être un peu trop originale mais toujours fort consciencieuse.

A. Buhl (Toulouse).

W. Blaschke. — **Vorlesungen über Differentialgeometrie.** III: Differentialgeometrie der Kreise u. Kugeln, bearbeitet von Gerhard Thomsen. (Die Grundlehren der mathem. Wissenschaften, XXIX.) — Un vol. gr. in-8°, 474 p.; br., RM. 26, relié, RM. 27,60; Verlag Julius Springer, Berlin.

Ce sont les leçons sur la géométrie de la sphère professées à l'Université de Hambourg par MM. W. Blaschke et W. Thomsen qui ont servi de base à ce volume rédigé par M. Thomsen. Elles apportent une importante contribution aux théories établies par Möbius, Laguerre et Lie. Ces trois géométries se rattachent à trois groupes de transformations qui ont entre eux des liens très étroits et que les auteurs désignent sous les noms de groupes de Möbius, de Laguerre et de Lie.

Il est intéressant de constater que l'étude systématique de ces groupes permet d'envisager une géométrie supérieure de la sphère par des moyens analogues à ceux qui ont été exposés par Klein pour la géométrie projective dans son programme d'Erlangen.

Les matières développées dans cet ouvrage offrent un intérêt tout particulier non seulement pour la théorie de la relativité, mais aussi pour les différentes branches de la géométrie non euclidienne. Elles complètent d'une manière utile les théories exposées dans les deux premiers volumes et qui, par leur ensemble, constituent les fondements géométriques de la théorie de la relativité d'après Einstein.

H. Fehr.

R. Fricke. — **Lehrbuch der Algebra** verfasst mit Benutzung von Heinrich Webers gleichnamigen Buche. Dritter Band: *Algebraische Zahlen.* — Un vol. in-8° de 506 pages avec 41 figures; broché, RM. 19,50, relié, RM. 22,50; Verlag Vieweg & Sohn A. G., Braunschweig, 1928.

Après avoir consacré les deux premiers volumes de son traité d'Algèbre supérieure à la résolution des équations algébriques et aux théories qui s'y rattachent, M. Fricke aborde, dans ce troisième et dernier volume, l'étude des nombres algébriques. L'ouvrage comprend deux parties. La première fournit un exposé de la théorie des corps algébriques. L'auteur s'appuie plus particulièrement sur les méthodes et les travaux de Dedekind et de ses disciples. Dans la seconde partie, il fait une étude approfondie de certains corps algébriques. Parmi les exemples classiques signalons les corps qui dépendent de la division du cercle, le corps quadratiques, ainsi que les groupes modulaires.

L'ensemble des matières exposées dans ce nouveau traité d'Algèbre supérieure donne un excellent aperçu des progrès considérables réalisés dans ce domaine depuis un siècle à la suite des voies nouvelles ouvertes par Abel et Galois.

H. F.

R. COURANT. — **Vorlesungen über Differential- u. Integralrechnung.** II: Funktionen mehrerer Veränderlicher. — Un vol. gr. in-8° de 360 p. avec 88 fig.; relié, RM. 18,60; Verlag J. Springer, Berlin, 1929.

Nous avons déjà signalé le premier volume de ce traité d'analyse rédigé plus particulièrement à l'usage des étudiants de première année de l'enseignement supérieur, universitaire et technique. Dans ce second volume l'auteur expose les principes fondamentaux concernant les fonctions de plusieurs variables et leurs applications géométriques. Evitant tout développement inutile dans une première introduction, il s'efforce de familiariser le lecteur avec les concepts nouveaux et les méthodes propres à l'analyse et de les présenter dans leurs rapports avec les applications géométriques et physiques.

L'ouvrage est divisé en six chapitres:

I. Quelques notions de géométrie analytique envisagées dans leurs liens avec la théorie des déterminants et les transformations affines, ainsi que les opérations vectorielles.
II. Fonctions de plusieurs variables et leurs dérivées. Formule de Taylor. Applications de la notion de vecteurs; *grad.*, *rot.* et *div.*
III. Fonctions implicites. Applications géométriques; courbes gauches et surfaces. Systèmes de fonctions; transformations et représentation. Maxima et minima.
IV. Intégrales multiples. Applications géométriques; calcul des volumes. Applications physiques; moment statique, centre de gravité, moment d'inertie, potentiel.
V. Intégrales curvilignes. Formules de Gauss, de Green et de Stokes.
VI. Equations différentielles. Exemples empruntés à la mécanique.

A la fin du volume on trouve un tableau des principales formules établies dans les tomes I et II. H. F.

G. JULIA. — **Exercices d'Analyse.** Rédigés par R. HARMEGNIES et R. JULIA. Tome 1er. — Un vol. in-8° de 454 p., avec 106 fig. dans le texte, Fr. 80.—; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Ce nouveau recueil d'exercices a été composé au cours de plusieurs années d'enseignement à la Faculté des Sciences de Paris et à l'Ecole Normale supérieure; chargé des interrogations et exercices coordonnés au Cours d'Analyse que professe M. Goursat, à la Faculté des Sciences, et pour faciliter aux élèves la compréhension, l'application, le développement du cours, M. G. Julia a rassemblé la collection d'exercices dont voici le premier volume.

Le classement adopté ici suit le « Cours d'Analyse » de M. Goursat. L'auteur développe de nombreux problèmes proposés à la fin des Chapitres de ce cours et ajoute lui-même d'intéressants exercices inédits. On trouvera aussi un choix de problèmes proposés dans les Facultés des Sciences, particulièrement à la Sorbonne, aux épreuves théoriques et pratiques du certificat de calcul différentiel et intégral, ainsi que quelques exercices intéressants proposés par M. Hadamard aux élèves de l'Ecole Polytechnique et quelques problèmes proposés à l'Agrégation des Sciences mathématiques. Dans la troisième partie du volume, M. Julia fait figurer, sous forme de compléments plutôt que d'exercices, certaines questions extraites du Traité d'Analyse de M. Picard (t. I).

Le nombre des exercices développés n'est cependant pas très élevé: cela tient à la méthode de travail choisie pour des conférences dans lesquelles on s'efforce de traiter à fond, en variant le plus possible les méthodes, un petit nombre d'exercices.

Cette intéressante collection de problèmes d'analyse sera bien accueillie, non seulement du candidat à la licence, mais encore de tous ceux qui enseignent le calcul différentiel et intégral dans les Facultés. H. F.

J. Haag. — **Cours complet de Mathématiques Elémentaires.** Tome III: *Géométrie.* — Un vol. in-8° de 343 pages avec 255 figures; F. 40.—; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1928.

En rédigeant ce traité de Géométrie élémentaire, M. Haag s'est inspiré de la méthode préconisée par Méray concernant l'introduction de la notion de déplacement et du principe de la fusion de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace. En renonçant à la division classique en huit livres, il a pu obtenir un ordre plus avantageux au double point de vue de la clarté et de la concision.

L'ouvrage comprend non seulement le programme de géométrie du baccalauréat, mais encore tout le début de la géométrie élémentaire. Ce début est généralement mal connu des élèves, parce qu'il n'est pas soumis directement à la sanction d'un examen. C'est pourquoi l'auteur a jugé utile d'en reprendre l'exposition, quitte à passer très rapidement sur les questions très simples.

Il nous suffira de reproduire les titres des vingt-sept chapitres pour donner un aperçu de l'ordre suivi:

Chapitre I. Droites, plans, angles, dièdres, perpendiculaires. — II. Le parallèlisme. — III. Triangles et polygones. — IV. Le cercle. — V. Rapports. — VI. Projections. — VII. Théorie des vecteurs libres. — VIII Translations et rotations. — IX. Symétries. — X. Angles trièdres et angles polyèdres. — XI. Cylindres, cônes, surfaces de révolution. — XII. La sphère .— XIII. Homothétie. — XIV. Relations métriques diverses. — XV. Puissance, axe radical, plan radical, centre radical. — XVI. Faisceaux de cercles et de sphères. — XVII. Faisceaux harmoniques, pôles et polaires. — XVIII. Constructions diverses. — XIX. Aires et volumes. — XX. Inversion. — XXI. Ellipse. — XXII. Hyperbole. — XXIII. Parabole. — XXIV. Coniques définies par un foyer et une directrice. — XXV. Sections coniques. — XXVI. Hélice. — XXVII. Théorie des vecteurs glissants.

Comme les tomes précédents, cet ouvrage sera complété par un recueil d'exercices résolus et proposés lui correspondant étroitement. H. F.

R. Estève. — **Algèbre** (compléments) **et Trigonométrie** à l'usage des Elèves de la Classe de Mathématiques et des Candidats aux Ecoles. Avec la collaboration de H. Mitault. — Deux vol. in-8°; tome I, 552 pages, avec 67 figures, Fr. 70; tome II, 314 pages, Fr. 40; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1928.

Cet ouvrage d'algèbre et de trigonométrie est destiné aux élèves de la classe de mathématiques élémentaires. Il comprend deux volumes. Le premier traite du calcul algébrique, des fonctions circulaires, des équations

et inéquations, tandis que le second contient l'étude des fonctions élémentaires, des dérivées et de leurs applications, ainsi que la résolution des triangles et des questions diverses.

Parmi les nombreuses originalités de l'ouvrage on peut signaler: la fusion de l'Algèbre et de la Trigonométrie; l'exposition de la théorie des logarithmes après les exposants fractionnaires et les exposants négatifs; l'exposition, à la fois très élémentaire et très rigoureuse, de la théorie des limites et de la continuité, et cela au début de l'ouvrage, ce qui permet d'en faire un usage constant; la façon d'introduire les inconnues auxiliaires dans la résolution de certaines équations et de certains systèmes; une méthode remarquable de résolution des problèmes, toujours la même, que les inconnues soient segmentaires ou angulaires, qu'il s'agisse d'un problème ordinaire ou d'une résolution de triangle, et conduisant l'élève, pour ainsi dire par la main, à la solution rigoureuse et complète.

Il convient de signaler aussi la grande part réservée dans l'ouvrage à l'étude des fonctions par la méthode directe (c'est-à-dire sans l'emploi des dérivées), dont la valeur éducative est indiscutable: nombreux sont les exemples de fonctions étudiées par cette méthode, entre autres le polynome du troisième degré et la fraction rationnelle du second. Nul doute qu'après la lecture de la quatrième partie les élèves ne s'imaginent plus que, seuls, la fonction linéaire, le trinome du second degré et la fonction homographique peuvent être étudiés par la méthode directe.

Quelques exercices sont proposés dans le texte, avec ou sans indication sur la solution. A la fin de chaque partie, et classés par chapitres, qui correspondent à ceux du Cours, sont proposés de nombreux exercices, choisis avec soin, qui illustrent l'ouvrage et le complètent au besoin. Pour les élèves à la recherche de manuels d'exercices avec solutions, l'ouvrage présente un gros avantage à cause du grand nombre d'exercices traités dans le texte: la valeur éducative de ces exercices, incorporés au cours, est grande, à l'inverse de celle des manuels.

W. Sierpinski. — **Leçons sur les nombres transfinis.** (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.) — Un vol. in-8° de 240 pages; Fr. 40; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1928.

Le livre de M. Sierpinski sur les nombres transfinis sera d'une grande valeur pour les initiés dans la théorie des ensembles. L'auteur, travailleur infatigable dans le domaine de cette théorie, fondateur principal et rédacteur en chef des *Fondamenta Matematica*, possède à la fois l'érudition apte à donner une étude riche en matière et l'esprit retenu lui permettant de mettre ses lecteurs au courant des travaux, même des plus récents, sans lui dicter des jugements. Il ne cache pas, il est vrai, ses penchants personnels, quand il en a; ainsi, en ce qui concerne le principe de Zermelo et ses applications, sujet qui préoccupe en ce moment beaucoup les mathématiciens d'une certaine école, M. Sierpinski se range du c té de ceux qui acceptent ce principe et cherchent à l'appliquer. Nous lui savons gré de ce qu'il nous fait cette exposition, d'autant plus que, d'après ce que M. Borel annonce dans sa préface, M. Lusin, le géomètre russe bien connu, prépare pour la même collection une monographie sur un sujet analogue et du point de vue opposé.

Le livre de Sierpinski se divise naturellement en deux parties, dont la

première traite des nombres cardinaux et la seconde des nombres ordinaux. C'est dans la seconde partie qu'on aperçoit surtout combien les recherches modernes ont aidé à éclaircir les idées introduites par Georg Cantor.

Grace Chisholm YOUNG (La Conversion, Vaud).

L. C. YOUNG. — **The Theory of Integration.** (Cambridge Tracts in Mathematics of Mathematical Physics, No. 21.) — Un vol. in-8°, VII-52 p.; Cambridge University Press.

Ce petit livre est une bonne introduction à l'étude des notions qui sont à la base de la théorie de l'intégration, et à cette théorie elle-même. On peut regretter cependant l'absence de renseignements bibliographiques et le ton un peu ampoulé de la préface.

Quoi qu'il en soit, ce volume pourra rendre des services aux étudiants qui désirent avoir une rapide initiation aux méthodes modernes de l'intégration.

G. JUVET (Lausanne).

O. HÖLDER. — **Die Arithmetik in strenger Begründung.** Deuxième édition. — — Un vol. in-8° de 73 pages; RM. 3,60; Julius Springer, Berlin, 1929.

Au moment où la question des fondements de l'arithmétique est remise à l'ordre du jour par ceux qui s'occupent d'axiomatique mathématique, on lira avec intérêt cet opuscule qui représente la conception de Weierstrass et de son école. L'auteur estime que la méthode synthétique permet d'édifier l'arithmétique d'une manière durable, mais que ce but ne saurait être atteint en adoptant le point de vue des formalistes. Quant à la conception intuitionniste, M. Hölder déclare qu'elle est restée sans influence sur la théorie des nombres réels.

A. WALTHER. — **Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen.** Erster Teil: Funktion und graphische Darstellung. Differential- und Integralrechnung. — Un vol. in-8° de 220 p. et 174 fig.; broché, RM. 8,60, relié, RM. 9,60; Julius Springer, Berlin, 1928.

Ce volume fait partie de la collection *Methodik der wissenschaftlichen Biologie* dirigée par le Prof. T. Péterfi (Berlin). Rédigé spécialement à l'intention des naturalistes, il est destiné à leur montrer, à l'aide d'exemples qui leur sont familiers, comment les mathématiques interviennent dans des questions de sciences naturelles.

Tandis que les ouvrages de mathématiques générales n'accordent en général qu'une place tout à fait accessoire et fort restreinte aux exemples empruntés à la pratique du laboratoire, l'auteur du présent ouvrage leur donne une place prépondérante. Il initie le lecteur à l'emploi de l'instrument mathématique en présentant les principes fondamentaux dans leurs liens étroits avec les applications. Chaque fois qu'une notion nouvelle est introduite, il montre l'interprétation qu'on peut en donner en sciences naturelles. Son exposé est accompagné de nombreux exemples numériques et de tableaux graphiques préparés avec beaucoup de soin.

Cette première partie est limitée aux éléments d'algèbre, de trigonométrie, de géométrie analytique et de calcul différentiel et intégral. Dans une seconde

partie l'auteur abordera des questions de statistique, de calcul des probabilités et d'approximations numériques dans leurs rapports avec les sciences naturelles. H. F.

Fr. A. WILLERS. — **Methoden der praktischen Analysis.** — Un vol. gr. in-8° de 344 p. avec 132 fig., M. 20; Walter de Gruyter & Cie, Berlin et Leipzig, 1928.

Dans les écoles techniques supérieures les exercices d'analyse doivent faire une large place aux exemples numériques empruntés aux mathématiques appliquées. C'est à cette catégorie d'étudiants, ainsi qu'aux physiciens et aux ingénieurs que s'adresse plus particulièrement cet ouvrage. Mais il sera aussi lu avec profit par les étudiants des Facultés.

L'auteur se propose d'initier le lecteur aux principales méthodes numériques et graphiques de l'analyse appliquée et à l'emploi de la règle à calcul, du planimètre et de l'intégraphe. Après avoir examiné les approximations numériques, il étudie successivement l'interpolation, l'intégration et la différentiation approchées, la résolution numérique des équations, le choix de fonctions empiriques dans l'interpolation, l'analyse harmonique de fonctions périodiques, l'intégration approchée d'équations différentielles. Son exposé est accompagné de nombreuses applications numériques.

H. F.

Collection de Suggestions scientifiques publiée sous la direction de Léon BRILLOUIN. — *Fasc.* 1: Quelques suggestions concernant la matière et le rayonnement, par Th. COPPEL, G. FOURNIER, D. K. YOVANOVITCH, 47 p., Fr. 4,50; *Fasc.* 2: Sur la théorie des quanta de lumière, par A. PROCA, 96 p.; Fr. 9; Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris.

Cette nouvelle collection se propose de devenir une sorte de bibliothèque des conceptions nouvelles, à laquelle s'adresseront les chercheurs en quête de suggestions, et que parcourra également avec plaisir le lecteur curieux des choses de la science. Le premier fascicule a été analysé précédemment (p. 174). Il contient quelques suggestions concernant la matière et le rayonnement destinées à montrer la possibilité d'explication de certains phénomènes et à faciliter la conception de théories plus complètes.

Dans le second, l'auteur présente un essai tendant de lever quelques-unes des difficultés qu'on rencontre lorsqu'on veut concilier les deux principales théories de l'optique, la théorie des ondes et celle des quanta de lumière. En introduisant une hypothèse fondamentale, il développe une théorie des quanta de lumière pour laquelle les principales objections qu'on a faites à la théorie actuelle ne sont plus valables. H. F.

Proceedings of the International Mathematical Congress, held in Toronto, August 11-16, 1924, edited by J. C. FIELDS, with the collaboration of an editorial Committee. — Deux vol. gr. in-4°, 935 et 1006 p.; The University Press of Toronto, 1928.

Au moment de mettre ce fascicule sous presse, nous recevons les comptes rendus détaillés du Congrès international de mathématiques tenu à Toronto, en août 1924, sous la présidence de M. J. C. Fields, et sous les auspices de l'Université de Toronto et de l'Institut Royal Canadien.

Les Actes du Congrès forment deux beaux volumes in-4° comprenant ensemble près de deux mille pages avec de nombreuses figures, des planches et des illustrations hors texte. Le premier volume contient, après divers documents concernant le congrès, les conférences générales présentées par MM. Cartan, Dickson, Le Roux, Pierpont, Pincherle, Severi, Störmer et Young, puis les communications des sections I et II. Le second volume renferme les travaux des autres sections au nombre de quatre. La liste complète que nous avons publiée en son temps (25me année, p. 110-123) nous dispense d'entrer dans plus de détails.

Il faut savoir gré à M. Fields d'avoir pu mener à bien cette importante publication malgré de nombreuses difficultés de toute nature.

H. Fehr.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

L. Balser. — **Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze).** (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, 81.) — Un fasc. in-16° de 59 p. avec 40 fig.; RM. 1,20; B. G. Teubner, Leipzig.

Introduction au tracé des cartes géographiques mise à la portée des élèves de l'enseignement secondaire supérieur. Ils y trouveront d'intéressantes applications mettant en lumière la pénétration réciproque des différentes branches mathématiques.

B. Bavink. — **Die Hauptfragen der heutigen Naturphilosophie, II.** (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei, Bd. 18.) — Un vol. in-8° de 174 p.; RM. 4,20; Technische Bücherei, Otto Salle Verlag, Berlin, 1928.

L'auteur continue dans ce second volume son exposé des grandes questions qui sont actuellement à l'ordre du jour dans la philosophie des sciences. Il passe aux problèmes des sciences naturelles qui touchent au domaine de la métaphysique et il examine successivement les questions concernant la physique, la biologie et l'anthropologie.

G. Bessiere. — **Le Calcul intégral facile et attrayant.** Deuxième édition. — Un vol. in-8° de 214 p. avec 52 fig.; Fr. 15; Ed. Dunod, Paris, 1929.

Ouvrage de vulgarisation permettant à toute personne possédant quelques rudiments d'algèbre et de géométrie de s'initier aux éléments du calcul différentiel et intégral.