Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES

Autor: Bouligand, Georges / Roussel, Andrè

Kapitel: 9. Définition du rotationnel.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21866

Par suite, pour tout contour fermé à tangente continue sans point double C parcouru dans le sens direct :

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_S \mathrm{div}\,\vec{V}\,.\,d\sigma \tag{7}$$

on en tire le théorème suivant, généralisation du théorème classique sur l'intégrale des différentielles exactes :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé sans point double est que la divergence circulaire centrée du vecteur : $\vec{x}Q - \vec{y}P$ *soit identiquement nulle dans la région du plan envisagée*[1].

D'après (7) cette condition est suffisante; elle est aussi nécessaire puisque le long de tout cercle de centre M l'intégrale

$$\int_C (\vec{x}Q - \vec{y}P)\,.\,\vec{\nu}\,ds$$

étant nulle par hypothèse, il en sera de même de son quotient par $\pi\rho^2$ quel que soit ρ ; d'où existence en chaque point d'une divergence circulaire centrée nulle.

9. *Définition du rotationnel.*

Pour définir le rotationnel, nous poserons :

$$\mathrm{div}\,(\vec{V} \wedge \vec{u}) = \vec{u}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} \tag{8}$$

où $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire de direction quelconque, mais fixe[2]. On voit immédiatement que si les composantes de $\vec{V}$ ont des dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z, le rotationnel ainsi défini coïncide bien avec le rotationnel classique. Dans le

---

1 L'énoncé suppose la continuité de la tangente. On pourrait d'ailleurs aisément, à la faveur d'un théorème de M. Lebesgue, étendre le résultat aux courbes rectifiables.

2 Pareillement, on pourrait unifier la définition du gradient et de la divergence et aboutir à la notion de gradient sphérique centré en utilisant l'identité

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\,.\,\vec{u} = \mathrm{div}\,(\varphi\vec{u}).$$

cas contraire pour justifier la définition fournie par l'équation (8) il faut:

1° Que $\vec{V} \wedge \vec{u}$ ait une divergence (au sens généralisé défini plus haut).

2° Que (8) définisse alors bien un vecteur et un seul. Examinons le premier point: la condition énoncée sera remplie si l'intégrale:

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{9}$$

prise sur la sphère S de centre M et de rayon ρ admet une limite, quand ρ tend vers zéro, continue avec M, et reste inférieure quel que soit ρ à un nombre fixe Λ. Or, on peut écrire (9), en désignant par ϖ le volume de S:

$$\frac{\vec{u}}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma \tag{10}$$

Alors 1° sera satisfaite si la longueur du vecteur $\overrightarrow{W}(\rho, M)$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma$$

reste inférieure à Λ quel que soit ρ et M, et si $\vec{W}$ tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro. On aura alors d'après (8), (9) et (10):

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma\ ; \tag{11}$$

cette relation (11) définit alors complètement le rotationnel et la condition 2° est bien remplie.

10. *Formule de Stokes.*

Nous allons montrer que l'existence et la continuité du rotationnel généralisé que nous venons de définir dans le paragraphe précédent suffisent pour assurer l'exactitude de la formule de Stokes:

$$\int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{12}$$

Σ étant une portion de surface admettant un champ de normales