10. Formule de Stokes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

cas contraire pour justifier la définition fournie par l'équation (8) il faut:

1° Que $\vec{V} \wedge \vec{u}$ ait une divergence (au sens généralisé défini plus haut).

2° Que (8) définisse alors bien un vecteur et un seul. Examinons le premier point: la condition énoncée sera remplie si l'intégrale:

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{9}$$

prise sur la sphère S de centre M et de rayon ρ admet une limite, quand ρ tend vers zéro, continue avec M, et reste inférieure quel que soit ρ à un nombre fixe Λ. Or, on peut écrire (9), en désignant par ϖ le volume de S:

$$\frac{\vec{u}}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma \tag{10}$$

Alors 1° sera satisfaite si la longueur du vecteur $\vec{W}(\rho, M)$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma$$

reste inférieure à Λ quel que soit ρ et M, et si $\vec{W}$ tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro. On aura alors d'après (8), (9) et (10):

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\varpi}\int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V})\, d\sigma\ ; \tag{11}$$

cette relation (11) définit alors complètement le rotationnel et la condition 2° est bien remplie.

10. *Formule de Stokes.*

Nous allons montrer que l'existence et la continuité du rotationnel généralisé que nous venons de définir dans le paragraphe précédent suffisent pour assurer l'exactitude de la formule de Stokes:

$$\int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \tag{12}$$

Σ étant une portion de surface admettant un champ de normales

continu, limité par une courbe fermée simple C admettant une tangente continue.

Nous allons commencer par établir (12) en prenant pour C un contour triangulaire A_1, A_2, A_3 : Σ sera alors la portion de plan intérieure à ce triangle, $\vec{v}$ sera un *vecteur fixe* $\vec{u}$ perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$ et tel que l'observateur disposé suivant $\vec{u}$ voit un mobile décrivant $A_1A_2A_3$ tourner dans le sens d'orientation des axes de coordonnées. Nous voulons calculer l'intégrale :

$$I = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \,.\, \vec{u}\, d\sigma \;;$$

elle est, d'après (8) égale à :

$$\int_{\Sigma} \text{div}\, (\vec{V} \wedge \vec{u})\, d\sigma \;;$$

transformons cette intégrale de surface, en intégrale de volume à l'aide de l'artifice suivant : formons un prisme droit de bases (A'_1, A'_2, A'_3), (A_1, A_2, A_3) distantes d'une quantité infiniment petite l. Nous ferons de plus :

$$\overrightarrow{A'_1A_1} = \overrightarrow{A'_2A_2} = \overrightarrow{A'_3A_3} = \lambda^2 \vec{u} \;.$$

On a alors, à un infiniment petit près :

$$I = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \text{div}\, (\vec{V} \wedge \vec{u})\, d\omega$$

Ω étant le domaine prismatique, $d\omega$ l'élément de volume. Mais le théorème flux-divergence nous donne :

$$I = \frac{1}{l} \int_{S} (\vec{V} \wedge \vec{u}) \,.\, \vec{v}\, dS$$

S étant la surface du prisme, $\vec{v}$ la normale extérieure à S. Mais on peut encore écrire :

$$I = \frac{1}{l} \int_{S} (\vec{u} \wedge \vec{v})\, \vec{V}\, dS \;.$$

Cette intégrale se scinde en 5 intégrales partielles étendues respectivement aux deux bases et aux trois faces latérales. Les deux premières sont nulles car on a alors:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{u}) = 0 .$$

Considérons donc la portion I_1 de I relative à la face $A_1 A_2 A_2' A_1'$. Nous avons:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{A_1 A_2} .$$

D'autre part, soit $d\vec{M}$ un vecteur infiniment petit colinéaire et de même sens que $\overline{A_1 A_2}$. Nous avons:

$$dS = l . dM$$

et nous pouvons écrire, à un infiniment petit près:

$$I_1 = \int_{\overline{A_1 A_2}} \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{A_1 A_2} . \vec{V} . d\vec{M} .$$

ou encore:

$$I_1 = \int_{\overline{A_1 A_2}} \vec{V} . d\vec{M} .$$

En raisonnant de même pour I_1, I_2, I_3, on voit immédiatement que l'on a:

$$I = \int_C \vec{V} . d\vec{M}$$

C étant le contour $A_1 A_2 A_3$.

Il est alors facile d'établir la formule (12) pour toutes les surfaces Σ. En effet, en vertu des hypothèses relatives à la continuité du champ de normales à Σ et à celle du rotationnel on peut trouver une surface polyédrale Σ_n inscrite dans Σ, limitée par un contour Γ_n inscrit dans Γ telle que la différence

$$\left| \int_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} . \vec{v} . d\sigma - \int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} . \vec{v}_n . d\sigma_n \right|$$

tende vers zéro quand n augmente indéfiniment, ainsi que:

$$\left| \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} - \int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_n \right|$$

Or:

$$\int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu}_n \, d\sigma_n = \int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_n \tag{13}$$

car il est clair que l'on a:

$$\int_{\Gamma_n} \vec{V} \cdot d\vec{M}_r = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{C_i} \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

C_i étant une face triangulaire quelconque de Σ_n, car tout côté appartenant à deux triangles à la fois de Σ_n sera parcouru dans les deux sens, et les intégrales de $\vec{V}.d\vec{M}$ correspondantes se détruiront; finalement il ne restera que les intégrales relatives aux côtés de la courbe limite Γ_n. On déduit alors immédiatement l'identité (12) de l'équation (13) en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut. Le théorème de Stokes se trouve ainsi établi.

Remarque: La formule de Stokes montre que l'intégrale:

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

prise sur toute surface fermée Σ est identiquement nulle. On en déduit alors facilement que le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}$, défini par l'équation (11) admet partout une divergence qui satisfait à l'identité remarquable:

$$\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V}) = 0$$

comme dans le cas classique où les composantes de $\vec{V}$ auraient des dérivées des deux premiers ordres.

11. *Composantes du rotationnel.*

Nous allons établir le théorème fondamental suivant:

Soit le vecteur:

$$\vec{V} = \vec{x}\, P(x, y, z) + \vec{y}\, Q(x, y, z) + \vec{z}\, R(x, y, z)$$