12. Conséquences du théorème flux-divergence généralisé.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

qu'un nombre fini de points anguleux grâce à l'artifice qui consiste à arrondir ces singularités; et cela suffit pour que ω soit la différentielle d'une fonction dF.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

soit une différentielle totale est que l'on ait:

$$\mathrm{div}_{(x)}\vec{V} = 0\,, \qquad \mathrm{div}_{(y)}\vec{V} = 0\,; \qquad \mathrm{div}_{(z)}\vec{V} = 0\,.$$

12. *Conséquences du théorème flux-divergence généralisé.*

Pour terminer nous allons enfin indiquer quelques conséquences intéressantes que l'on peut tirer de la généralisation donnée par M. Bouligand du théorème flux-divergence. Plaçons-nous dans le cas du plan et soit Oxy un système d'axes orthogonal et normal. Donnons-nous une fonction $f(x)$ et considérons le vecteur:

$$\vec{x} f(x)$$

supposons qu'il admette une divergence circulaire centrée continue: Je dis alors que $f(x)$ admet une dérivée continue et que l'on a:

$$f'(x) = \mathrm{div}\,\vec{x} f(x)\,.$$

Soit en effet C le contour rectangulaire limité par les droites Ox, $x = x_0$, $y = a$, Oy. Nous avons S, étant le domaine de ce rectangle:

$$\int_S \mathrm{div}\,\vec{x} f(x) = \int_C f(x)\,\vec{x} \cdot \vec{\nu}\,ds\,.$$

Le long de Ox et du côté opposé à Ox, on a:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = 0$$

le long de la parallèle à Oy d'abscisse x_0:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = \vec{x} \cdot \vec{x} = 1$$

et le long de Oy:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = -\vec{x} \cdot \vec{x} = -1\,.$$

On a donc:

$$\int_C f(x)\,\vec{x}\,.\,\vec{\nu}\,ds = af(x_0) - af(0)\ .$$

Or:

$$\int_S \operatorname{div}\vec{x}\,f(x) = a\int_0^{x_0} \operatorname{div}\vec{x}\,f(x)\,dx$$

car div $\vec{x}\,f(x)$ dépend de x seul. On a donc :

$$f(x_0) - f(0) = \int_0^{x_0} \operatorname{div}\vec{x}\,f(x)\,dx$$

x_0 étant arbitraire, nous en tirons la conclusion annoncée. Ceci posé, soit Γ un cercle de centre $(x_0, 0)$ et de rayon ρ. Nous avons:

$$\operatorname{div}\vec{x}\,f(x) = \lim \frac{1}{\pi\rho^2}\int_\Gamma \vec{x}\,f(x)\,.\,\vec{\nu}\,ds\ .$$

Or:

$$\vec{\nu} = \frac{x - x_0}{\rho}\vec{x} + \frac{y - y_0}{\rho}\vec{y}\ .$$

Donc

$$\vec{x}\,.\,\vec{\nu} = \frac{x - x_0}{\rho} = \cos\alpha$$

et

$$ds = \rho\,d\alpha\ ;$$

donc

$$\operatorname{div} f(x)\,\vec{x} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\alpha)\cos\alpha\,d\alpha$$

et nous avons le théorème suivant:

Si f (x) *est telle que la quantité:*

$$\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\alpha)\cos\alpha\,d\alpha$$

reste bornée en valeur absolue aussi petit soit ρ, *et tende vers une limite* φ(x) *continue quand* ρ *tend vers zéro, alors* f(x) *admet une dérivée continue égale à* φ(x).

On voit d'ailleurs facilement que si $f'(x)$ existe la quantité ci-dessus a une limite qui lui est égale. Il est clair que le théorème

ci-dessus est susceptible de nombreuses variantes, puisque pour définir le jacobien on peut prendre n'importe quelle courbe fermée sans points doubles entourant le point x et tendant vers lui.

Prenons en particulier un jacobien carré. Nous aurons à former la quantité:

$$\frac{f(x+\rho) - f(x-\rho)}{2\rho}$$

et l'on voit que si elle est bornée en valeur absolue et tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro, le quotient

$$\frac{f(x+\rho) - f(x)}{\rho}$$

qui définit la dérivée admet lui aussi une limite égale à la précédente.

Prenons encore un jacobien carré, mais en prenant le point x comme point de concours des diagonales, qui seront parallèles respectivement à Ox et à Oy, et l'on sera amené à faire les hypothèses énoncées plus haut sur l'expression remarquable:

$$\frac{1}{\rho^2}\left[\int_{x_0}^{x_0+\rho} f(x)\,dx - \int_{x_0-\rho}^{x_0} f(x)\,dx\right]$$

comme le montre un calcul facile.

Enfin, pour terminer, nous pouvons remarquer que rien ne nous obligeait à rester dans l'espace à 2 dimensions, et l'on pouvait par exemple considérer la divergence sphérique centrée de $\vec{x}\,f(x)$, c'est-à-dire :

$$\lim \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} \int_{\Sigma} f(x)\,\vec{x}\,.\,\vec{\nu}\,d\sigma$$

Σ étant une sphère de centre x et de rayon ρ. Un calcul facile permet d'écrire cette expression:

$$\lim_{\rho=0} \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi} f(x+\rho\cos\alpha)\,\sin 2\alpha\,d\alpha\,;$$

on en tire les mêmes conclusions que précédemment.